

## Störung einer Planetenbahn durch die Bewegung der Sonne

### Einleitung

Die Sonne steht nicht fest im Raum. Abgesehen von einer gleichförmigen Bewegung im Universum, bewegt sie sich um den Mittelpunkt der Massen der Sonne und aller Planeten auf einer nicht besonders regelmäßigen Bahn, die hauptsächlich von den drei großen Planeten beeinflusst wird. Dabei kann der Mittelpunkt der Sonne bis zu zwei Sonnenradien vom Massenmittelpunkt abweichen [1].

Für einen beliebigen Planeten oder Asteroiden zeigt die Gravitationskraft, wenn man von der Gravitation infolge anderer Himmelskörper absieht, immer zu Sonne, nicht etwa zum Massenmittelpunkt.

Nimmt man als Referenzbahn eine Kepler-Ellipse um den Massenmittelpunkt, dann stellt sich die Frage, wie die kleinen Bewegungen der Sonne diese Bahn verändern. Insbesondere muß geklärt werden, ob die modifizierte Bahn stabil ist.

Der Einfachheit halber wird nun als Referenzbahn ein Kreis angenommen. Der Radius ist  $r$ , der Winkel ist  $\varphi$ . Durch kleine Bewegungen der Sonne entstehen zusätzliche Kräfte  $\delta F_r$  in radialer Richtung und  $\delta F_\varphi$  in tangentialer Richtung. Diese Kräfte verursachen Bahnstörungen  $\delta r$  und  $\delta \varphi$ .

Diese werden zunächst mittels Störungsrechnung linearisiert berechnet. Danach wird die Bahn mittels numerischer Integration bestimmt.

Als Störkräfte sollen Deltafunktionen wirken. Das ist zwar nicht besonders realistisch, aber geeignet, die Typen von Teillösungen zu erkennen.

$\delta F_r$  entsteht durch einen pulsartigen Versatz der Sonne in radialer Richtung hin zum Planeten. Ein Versatz der Sonne quer dazu erzeugt im wesentlichen eine tangentielle Störkraft  $\delta F_\varphi$ .

### Bewegungsgleichungen

Bewegungsgleichungen nach [2] nebst Störkräften:

$$(1) \quad \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{MG}{r^2} - \delta F_r$$
$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = +\delta F_\varphi$$

Lineare Variationsgleichungen:

$$(3) \quad \delta\ddot{r} - \delta r\dot{\varphi}^2 - 2r\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi} = +\frac{2MG}{r^3}\delta r - \delta F_r$$
$$\delta r\ddot{\varphi} + r\delta\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{r}\dot{\varphi} + 2\dot{r}\delta\dot{\varphi} = +\delta F_\varphi$$

Referenzlösung sei ein Kreis:

$$(5) \quad r = R \quad \dot{r} = 0 \quad \ddot{r} = 0$$
$$\varphi = \omega t \quad \dot{\varphi} = \omega \quad \ddot{\varphi} = 0$$

$$(7) \quad \frac{MG}{r^2} = \omega^2 r, \quad \frac{2MG}{r^3} = 2\omega^2$$

Eingesetzt in (3),(4):

$$(8) \quad \delta\ddot{r} - 3\omega^2\delta r - 2R\omega\delta\dot{\varphi} = -\delta F_r$$
$$2\omega\delta\dot{r} + R\delta\ddot{\varphi} = +\delta F_\varphi$$

Um am Ende  $\delta r$  und  $\delta \varphi$  mit den richtigen Dimensionen zu erhalten, werden die folgenden Deltafunktionen verwendet:  $\delta F_r = \varepsilon \omega R \Delta_r$  und  $\delta F_\varphi = \varepsilon \omega R \Delta_\varphi$ . Hierbei sind  $\Delta_r$  und  $\Delta_\varphi$  mathematische Deltafunktionen mit der Laplace-Transformierten Eins. Mit  $\varepsilon$  wird über die Stärke der Impulse verfügt.

### Laplace-Transformation

$$(10) \quad \begin{aligned} (s^2 - 3\omega^2)\delta r - 2R\omega s\delta\varphi &= -\delta F_r = -\varepsilon\omega R\Delta_r \\ 2\omega s\delta r + Rs^2\delta\varphi &= +\delta F_\varphi = +\varepsilon\omega R\Delta_\varphi \end{aligned}$$

### Lösung mittels Cramer-Regel

$$(12) \quad \begin{aligned} N(s) &= (s^2 - 3\omega^2)Rs^2 + 4R\omega^2s^2 \\ N(s) &= Rs^2(s^2 + \omega^2) \end{aligned}$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \delta r &= \frac{\varepsilon}{N}(-Rs^2\omega R\Delta_r + 2R\omega s\omega R\Delta_\varphi) \\ \delta\varphi &= \frac{\varepsilon}{N}(+2\omega s\omega R\Delta_r + (s^2 - 3\omega^2)\omega R\Delta_\varphi) \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} \delta r &= \varepsilon \left[ \frac{-\omega R\Delta_r}{(s^2 + \omega^2)} + \frac{2\omega^2 R\Delta_\varphi}{s(s^2 + \omega^2)} \right] \\ \delta\varphi &= \varepsilon \left[ \frac{2\omega^2 \Delta_r}{s(s^2 + \omega^2)} + \frac{\omega(s^2 - 3\omega^2)\Delta_\varphi}{s^2(s^2 + \omega^2)} \right] \end{aligned}$$

### Lösung für impulsartige Störungen

Es kommen die folgenden Lösungstypen vor:

$$(18) \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow \sin(\omega t)$$

$$(19) \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow \cos(\omega t)$$

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)} &= \frac{A}{s} + \frac{B + Cs}{(s^2 + \omega^2)} = \frac{A(s^2 + \omega^2) + Bs + Cs^2}{s(s^2 + \omega^2)} = \\ \frac{1}{\omega^2 s} - \frac{s}{\omega^2(s^2 + \omega^2)} &\Rightarrow \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergab  $A = 1/\omega^2$ ,  $B = 0$ ,  $C = -1/\omega^2$

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{s^2 - 3\omega^2}{s^2(s^2 + \omega^2)} &= \frac{A}{s^2} + \frac{B}{(s^2 + \omega^2)} = \frac{A(s^2 + \omega^2) + Bs^2}{s^2(s^2 + \omega^2)} = \\ -\frac{3}{s^2} + \frac{4}{(s^2 + \omega^2)} &\Rightarrow -3t + \frac{4}{\omega} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergab  $A = -3$ ,  $B = 4$

Damit erhält man diese Lösungen:

$$(24) \quad \delta r = \varepsilon R [-\sin(\omega t)\Delta_r + 2(1 - \cos(\omega t))\Delta_\varphi]$$

$$(25) \quad \delta\varphi = \varepsilon [+2(1 - \cos(\omega t))\Delta_r + (-3\omega t + 4 \sin(\omega t))\Delta_\varphi]$$

## Stabilität der Lösungen

Ein radialer Impuls  $\delta F_r$  erzeugt für  $\delta r$  eine Sinusschwingung mit der Frequenz  $\omega$  und für  $\delta\varphi$  einen kleinen Versatz und eine Kosinusschwingung.

Ein tangentialer Impuls  $\delta F_\varphi$  erzeugt für  $\delta r$  einen kleinen Versatz und eine Kosinusschwingung. Für  $\delta\varphi$  ergibt sich eine Sinusschwingung und ein linear wachsender Term. Es wird sich anhand der grafischen Ergebnisse zeigen, daß diese Lösung nur für kleine Störkräfte brauchbar ist.

Es ist nicht erkennbar, ob sich geschlossene Kurven ergeben.

Bewegt sich die Sonne mit irgendeiner Frequenz  $\Omega \neq \omega$ , dann wird die Lösung Schwingungen mit dieser Frequenz enthalten, deren Amplitude zunächst linear wächst, dann aber allmählich konstant bleibt.

Gilt aber  $\Omega = \omega$ , dann hat man Resonanz: die Amplitude wächst unbegrenzt immer weiter, was natürlich die Grenzen der linearen Störungsrechnung sprengt.

Diese Lösungen könnte man mittels Frequenzgang berechnen, allerdings ist das wegen der fehlenden Dämpfung nur ein Lösungsanteil.

## Kontrolle

In den Gleichungen (24) bis (27) sind  $\Delta_r$  und  $\Delta_\varphi$ , entweder Null oder Eins, als Schalter aufzufassen, mit dem der jeweilige Impuls angewendet werden soll.

Nach dem Verschwinden der Impulse, die man sich unabhängig voneinander vorstellen kann, müßte sich in beiden Fällen näherungsweise eine Kepler-Ellipse für die Überlagerung der Referenzbahn mit den kleinen Abweichungen ergeben.

$$(26) \quad r = R + \delta r = R + \varepsilon R [-\sin(\omega t)\Delta_r + 2(1 - \cos(\omega t))\Delta_\varphi]$$
$$\varphi = \omega t + \delta\varphi = \omega t + \varepsilon [+2(1 - \cos(\omega t))\Delta_r + (-3\omega t + 4\sin(\omega t))\Delta_\varphi]$$

Darstellung der Bahnkurve:

$$(28) \quad x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$

Dieser Nachweis ist bis jetzt nicht formelmäßig gelungen.

Daher werden im nächsten Abschnitt Lösungen mittels numerischer Integration berechnet.

## Numerische Integration nach dem Verfahren von Heun [3]

Variable :

$$y_1 = r, \quad y_2 = \varphi, \quad y_3 = \dot{r}, \quad y_4 = \dot{\varphi}$$

Parameter (Referenzbahn, nur für Skalierung):

$$\omega = 1, \quad T = 2\pi / \omega,$$

$$dt = T / n, \quad (\text{z.B. } n = 360)$$

$$MG / R^2 = \omega^2 R$$

$$\frac{MG}{r^2} = \frac{MG R^2}{R^2 r^2} = \omega^2 R^3 / r^2 = g / r^2$$

$$g = \omega^2 R^3 \quad (g \text{ ist nur eine Abkürzung})$$

Skalierung der Kräfte, damit die Wirkung nicht von dt abhängt, sondern nur von  $\varepsilon$  (dt hebt sich heraus):

$$F_r = \varepsilon \Delta_r / dt$$

$$F_\varphi = \varepsilon \Delta_\varphi / dt$$

Anfang:

$$y_1 = R$$

$$y_2 = 0$$

$$y_3 = 0$$

$$y_4 = \omega$$

$$t = 0$$

$$x = y_1$$

$$y = 0$$

moveto x,y

Schleife:

For k = 1 to n

{ if k = 2 then ( $F_r = 0$ ,  $F_\varphi = 0$ )

$$dy_{1a} = dt y_3$$

$$dy_{2a} = dt y_4$$

$$dy_{3a} = dt(y_1 y_4^2 - g/y_1^2) - F_r$$

$$dy_{4a} = dt(-2y_3 y_4 / y_1) + F_\varphi / y_1$$

$$y_{1a} = y_1 + dy_{1a}$$

$$y_{2a} = y_2 + dy_{2a}$$

$$y_{3a} = y_3 + dy_{3a}$$

$$y_{4a} = y_4 + dy_{4a}$$

$$dy_{1b} = dt y_{3a}$$

$$dy_{2b} = dt y_{4a}$$

$$dy_{3b} = dt(y_{1a} y_{4a}^2 - g/y_{1a}^2) - F_r$$

$$dy_{4b} = dt(-2y_{3a} y_{4a} / y_{1a}) + F_\varphi / y_{1a}$$

$$y_1 = y_1 + (dy_{1a} + dy_{1b})/2$$

$$y_2 = y_2 + (dy_{2a} + dy_{2b})/2$$

$$y_3 = y_3 + (dy_{3a} + dy_{3b})/2$$

$$y_4 = y_4 + (dy_{4a} + dy_{4b})/2$$

$$x = y_1 \cos y_2$$

$$y = y_1 \sin y_2$$

lineto x,y

} for

## Ergebnisse

Nächste Seite: links sieht man die Kurven 1a–3a für die Integration mit Heun, rechts die Kurven 1b–3b für die Linearisierung (Störungsrechnung). Der große rote Punkt ist der Start, der kleine grüne Punkt liegt bei  $t=T$ . Die Kurven werden fortgesetzt bis  $y > 0$ , grün gezeichnet.

1a und 1b sind fast identisch, aber für die Integration ist die Umlaufdauer etwas größer als T.

2a sieht richtig aus, aber 2b ist sehr falsch. Wahrscheinlich ist der tangentielle Puls zu stark.

Die tangentielle Pulsstärke wurde vermindert: 3a und 3b sind dann sehr ähnlich.

Die Störungsrechnung hat nur begrenzte Gültigkeit. Hier ist wohl der linear wachsende Term im Winkel problematisch.

**Bahnkurven**

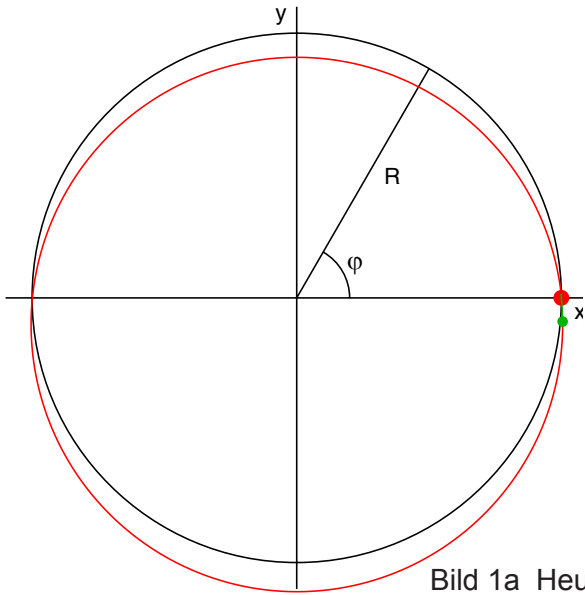


Bild 1a Heun  
Rad. Puls  $\epsilon=0.1$

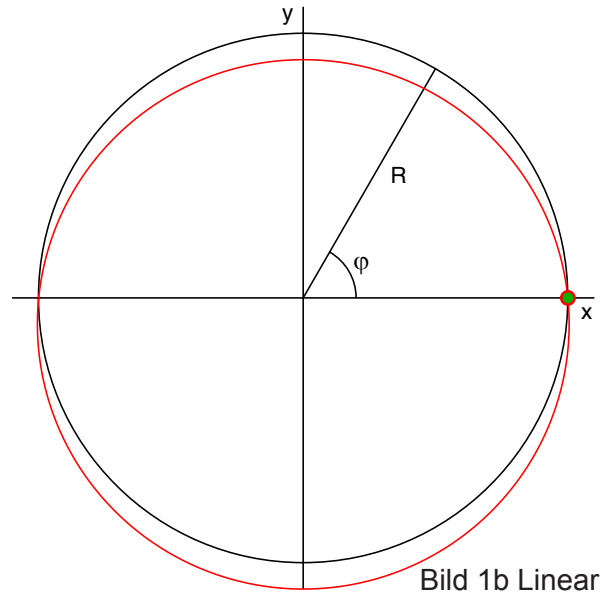


Bild 1b Linear  
Rad. Puls  $\epsilon=0.1$

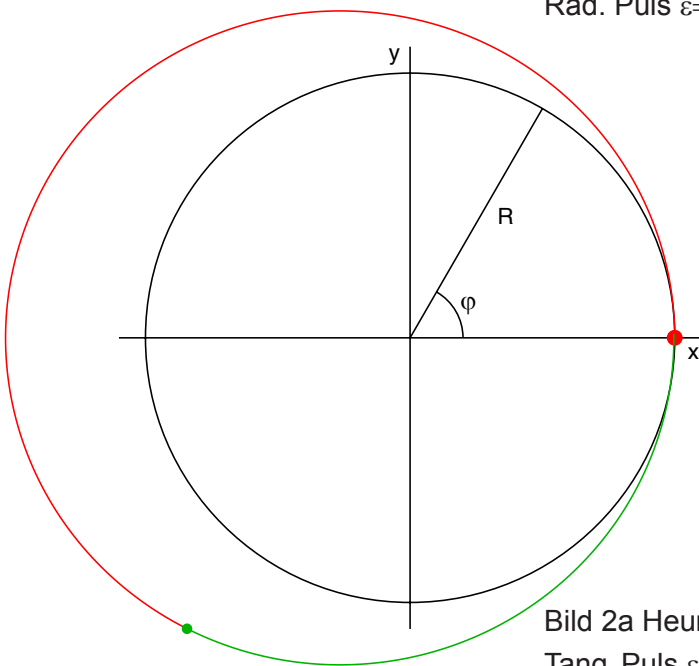


Bild 2a Heun  
Tang. Puls  $\epsilon=0.1$

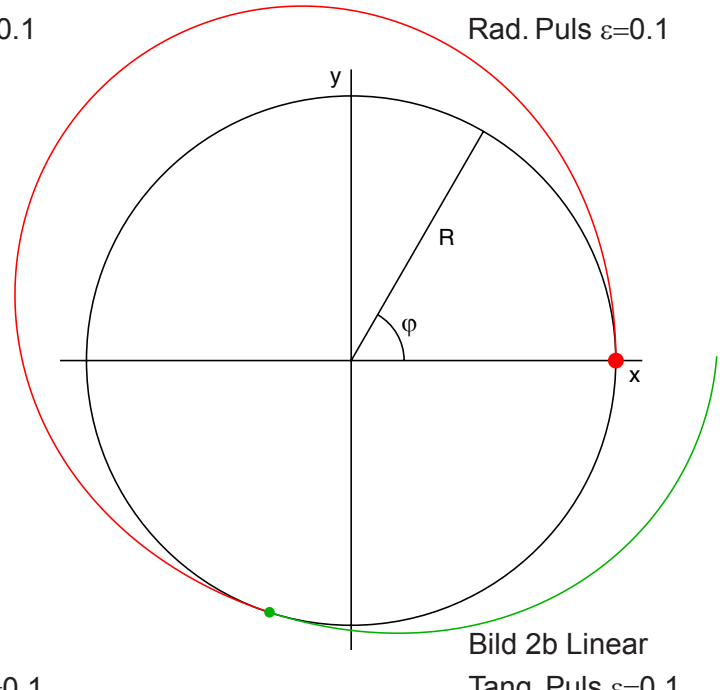


Bild 2b Linear  
Tang. Puls  $\epsilon=0.1$

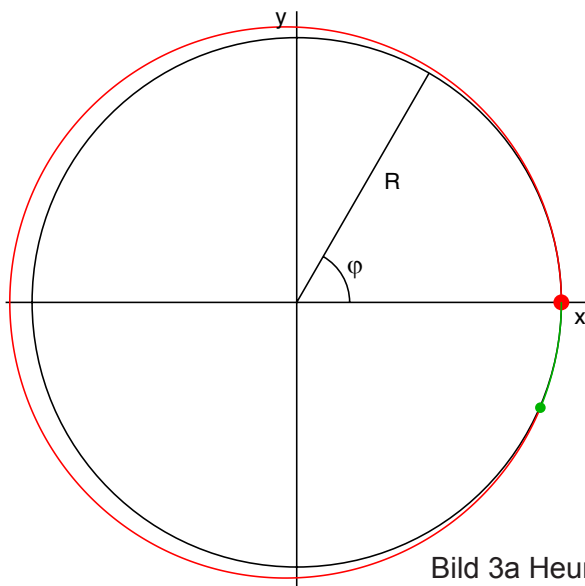


Bild 3a Heun  
Tang. Puls  $\epsilon=0.02$

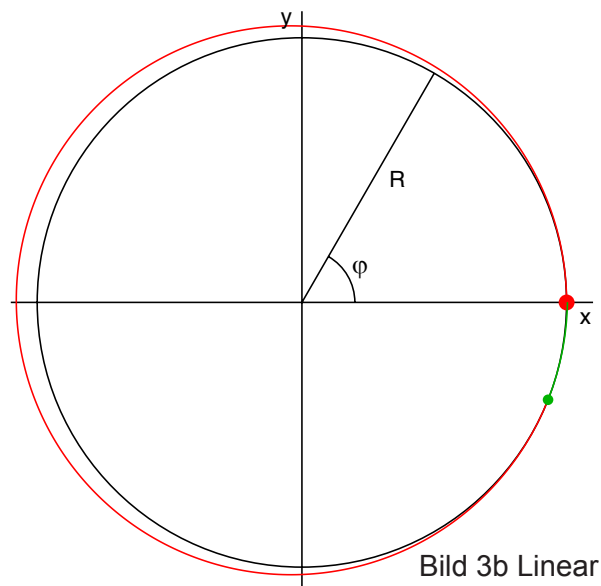


Bild 3b Linear  
Tang. Puls  $\epsilon=0.02$

## Referenzen

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Baryzentrum>
- [2] <http://docs-hoffmann.de/soldner22092021.pdf>
- [3] <http://docs-hoffmann.de/integ03082002.pdf>

Dank an Norbert Stuckenberg für die Diskussion und für Verbesserungsvorschläge.

Gernot Hoffmann, Emden, 17.Februar 2022