Gernot Hoffmann

Ablenkung des Lichtes durch eine große Masse, nach Johann Georg von Soldner

Einleitung

Isaac Newton (1642-1726) hat die Gesetze der Mechanik, insbesondere das Gravitationsgesetz, gegen Ende des 17.Jahrhundert entwickelt.Die *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* wurden 1687 veröffentlicht. Sein großer Beitrag *Opticks* zur Theorie des Lichts wurde erst 1704 gedruckt, aber die Arbeiten reichen weit zurück.
Newton nahm an, daß Licht ein Strom von Teilchen ist. Vorstellungen von der Masse der Teilchen und deren Geschwindigkeit hatte er nicht [1].

Der deutsche Astronom Johann Georg von Soldner (1776-1833) nahm an, daß Lichtteilchen, wenn sie denn eine Masse hätten, von Himmelskörpern abgelenkt würden und sich auf Bahnen bewegen müßten, die aus der Himmelsmechanik bekannt sind. In seiner fundamentalen Untersuchung [2] zeigt er, daß dies zutrifft, und daß es sich um Hyperbeln handelt, was wesentlich aus der großen Lichtgeschwindigkeit resultiert. Aufgrund der Identität von träger Masse und schwerer Masse fällt die Masse der Lichtteilchen bei der Aufstellung der Differentialgleichungen heraus. Soldner hatte die Arbeit 1801 verfaßt und 1804 veröffentlicht [2].
Im vorliegenden Aufsatz werden die Überlegungen Soldners nachvollzogen, an einigen Stellen vereinfacht, hinsichtlich der Zahlen für das Beispiel übersichtlicher gestaltet und an einer Stelle kritisch hinterfragt.

Albert Einstein (1879-1955) hatte 1915 in der Allgemeinen Relativitätstheorie postuliert, daß die Ablenkung des Lichtes eines Sterns beim Passieren der Sonne, beobachtbar an deren Rand bei einer totalen Sonnenfinsternis, etwa so sein müßte, wie der von Soldner berechnete Wert, dies aber später korrigiert: es ergab sich mitttels der Theorie der Raumkrümmung [3] das Zweifache des Wertes für die Berechnung mittels klassischer Mechanik, also des Soldnerschen Wertes. Soldners Arbeit hatte Einstein erst später gelesen, nämlich nach einem (unbegründeten) Plagiatsvorwurf.

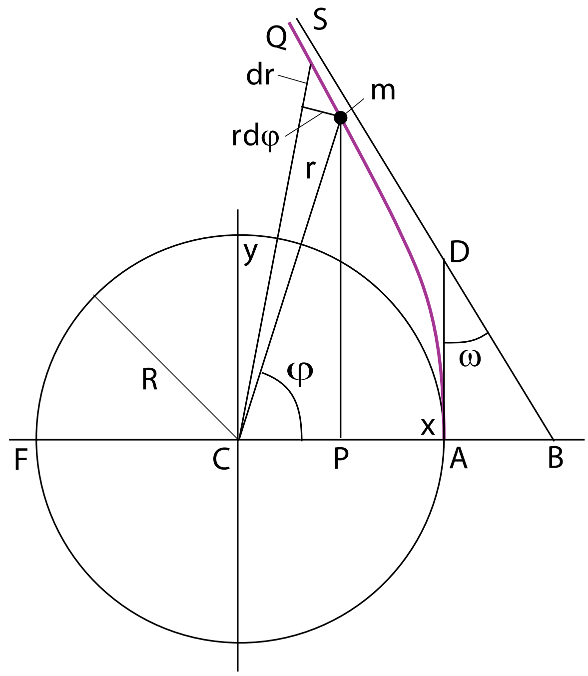
Messungen des Astronomen Arthur Eddington (1882-1944) in diesem Sinne im Jahre 1919 wurden zunächst als Bestätigung der Relativitätstheorie gefeiert, später aber eher zweifelnd beurteilt [4]. Eine Darstellung von Meßergebnissen aus den Jahren 1919-1931 veranschaulicht die erheblichen Meßunsicherheiten [5].

Mangels Kenntnis der Relativitätstheorie möchte der Verfasser keine eigene Meinung dazu äußern. Allerdings wäre es wünschenswert, die Frage zu klären, ob dem bewegten Photon aufgrund der Beziehung $E = mc^2 = h\nu$ die Masse $m = h\nu / c^2$ „zugeordnet“ werden darf, wie man manchmal lesen kann. Anscheinend sind sich die Physiker aber einig, daß das Photon keine Ruhemasse hat.

Soldners Ansatz

Die große Masse M hat den Radius R. Ein Lichtteilchen m startet in A tangential, wird aber auf seiner Bahn in Richtung Q abgelenkt. Der Beobachter befindet sich in B und sieht das Lichtteilchen in Richtung S. Ist die Bahn eine Hyperbel, dann erscheint das Licht in Richtung der Asymptoten BR mit einer Winkelverschiebung ω.

Für den wirklichen Fall kann man die obere Hälfte der Hyperbel nach unten spiegeln. Das Licht eines Sterns käme dann aus der Richtung Q, passierte die große Masse in A und verschwände nach unten, wo sich nun der Beobachter befindet. Der sieht dann die doppelte Verschiebung, nämlich 2ω .



Berechnung der Bahnkurve

Die Bewegungsgleichungen werden hier mit Hilfe des Lagrange-Formalismus in Polarkoordinaten hergeleitet, wobei die Gravitationskraft explizit eingeführt wird, statt über das Potential. Deswegen ist die Lagrange-Funktion $L = T$ statt $L = T - V$.

Kinetische Energie:

(1) $$T = \tfrac{1}{2} m V^2 = \tfrac{1}{2} m \left((r\dot{\varphi})^2 + \dot{r}^2 \right)$$

Lagrange-Gleichung für r:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = F_r$$

$$\frac{d}{dt} m\dot{r} - m r \dot{\varphi}^2 = -\frac{mMG}{r^2}$$

(4) $$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{MG}{r^2}$$

Lagrange-Gleichung für φ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = F_\varphi = 0$$

$$\frac{d}{dt} m r^2 \dot{\varphi} = 0$$

(7) $$r^2\ddot{\varphi} + 2 r \dot{r} \dot{\varphi} = 0$$

Integration der Gl.(7), Konstante C:

$$r^2\dot{\varphi} = C$$

(Kontrolle durch Ableiten)

Für $\varphi = 0$ mit $r = R$ gilt $V_0 = \dot{\varphi} R$

$$C = R^2 V_0 / R = V_0 R$$

(10) $\quad r^2 \dot{\varphi} = V_0 R$

(11) $\quad \dot{\varphi} = V_0 R / r^2$

Gl.(11) in Gl.(4) einsetzen:

$$\ddot{r} - r \frac{V_0^2 R^2}{r^4} = -\frac{MG}{r^2}$$

Erweitern mit $2\dot{r}$:

(13) $\quad 2\dot{r}\ddot{r} - 2\frac{V_0^2 R^2}{r^3}\dot{r} = -2\frac{MG}{r^2}\dot{r}$

Integration der Gl.(13), Konstante D:

(14) $\quad \dot{r}^2 + \frac{V_0^2 R^2}{r^2} = 2\frac{MG}{r} + D$

(Kontrolle durch Ableiten)

Gl.(14) mit $\dot{r} = dr / dt$ nach dt auflösen:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{D + \frac{2MG}{r} - \frac{V_0^2 R^2}{r^2}}}$$

Gl.(10) einsetzen:

(16) $\quad d\varphi = \frac{V_0 R}{r^2}\, dt = \frac{V_0 R}{r^2} \frac{1}{\sqrt{D + \frac{2MG}{r} - \frac{V_0^2 R^2}{r^2}}}\, dr$

Umformung unter der Wurzel:

(17) $\quad \frac{2MG}{r} - \frac{V_0^2 R^2}{r^2} = \frac{(MG)^2}{V_0^2 R^2} - \left(\frac{V_0 R}{r} - \frac{MG}{V_0 R}\right)^2$

Einsetzen in Gl.(16):

(18) $\quad d\varphi = \frac{V_0 R\, dr}{r^2 \sqrt{D + \frac{(MG)^2}{V_0^2 R^2} - \left(\frac{V_0 R}{r} - \frac{MG}{V_0 R}\right)^2}}$

Substitution:

(19) $\quad z = \frac{V_0 R}{r} - \frac{MG}{V_0 R}$

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{V_0 R}{r^2}$$

$$V_0 R\, dr = -dz\, r^2$$

Einsetzen in Gl.(18):

(22) $\quad d\varphi = -\frac{dz}{\sqrt{\left(D + \frac{(MG)^2}{V_0^2 R^2}\right) - z^2}}$

Integration, mit Konstanten α oder β:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin(x/a) + \beta = \pi/2 - \arccos(x/a) + \beta = -\left(\arccos(x/a) - \alpha\right)$$

(24) $$\varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{D + \frac{(MG)^2}{V_0^2 R^2}}} + \alpha$$

Bestimmung von D:

Aus Gl.(14) mit $\dot{r} = 0$ und $r = R$:

$$D = V_0^2 - \frac{2MG}{R}$$

Umformung eines Ausdrucks in Gl.(24):

(26) $$D + \frac{(MG)^2}{V_0^2 R^2} = V_0^2 - \frac{2MG}{R} + \frac{(MG)^2}{V_0^2 R^2} = (V_0 - \frac{MG}{V_0 R})^2$$

Gl.(24) mit Gl.(19) und Gl.(26):

$$\cos(\varphi - \alpha) = \frac{\frac{V_0 R}{r} - \frac{MG}{V_0 R}}{V_0 - \frac{MG}{V_0 R}}$$

Bestimmung von α mit $r = R$ und $\varphi = 0$:

$$\cos(-\alpha) = 1$$

$$\alpha = 0$$

(30) $$\cos\varphi = \frac{\frac{V_0 R}{r} - \frac{MG}{V_0 R}}{V_0 - \frac{MG}{V_0 R}} = \frac{V_0^2 R^2 - MGr}{r(V_0^2 R - MG)}$$

Für $r \to \infty$ ergibt sich der Winkel der Asymptote φ_∞.

$$-\cos\varphi_\infty = \sin\omega \approx \omega$$

Der Winkel der Ablenkung ω ist sehr klein.

(32) $$\omega = \frac{MG}{V_0^2 R - MG}$$

Anhand von Zahlenbeispielen findet man $V_0^2 R \gg MG$.

(33) $$\omega \approx \frac{MG}{V_0^2 R}$$

Für die Ablenkung eines Sterns infolge der Krümmung des Lichtstrahls an der Sonne ergibt sich der doppelte Wert. Außerdem kann man einen größeren Abstand als Vielfaches des Radius' der Sonne berücksichtigen:

Es sei R_S der Sonnenradius und R ein beliebiger Abstand:

(34) $$\omega_S = 2 \frac{M_S G}{V_0^2 R_S} (R_S / R)$$

Ergänzungen

Nachweis für $MG \ll V_0^2 R$:

(35) $$M_S G / c^2 R_S = \tfrac{1}{2}\omega_S \approx 0.21 \cdot 10^{-5}$$

Geschwindigkeit auf der Asymptoten:
Aus Gl.(14) mit $r \to \infty$:

(36) $$\dot{r}^2 = V_\infty^2 = D = V_0^2 - \frac{2MG}{R} = V_0^2(1 - \frac{2MG}{V_0^2 R})$$

$$V_\infty = V_0 \sqrt{(1 - \frac{2MG}{V_0^2 R})}$$

Mit $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon$:

(38) $$V_\infty \approx V_0 (1 - \frac{MG}{V_0^2 R}) = V_0 (1 - \tfrac{1}{2}\omega)$$

Zahlenwerte

Masse des großen Körpers (Sonne):
$M = M_S = 1.98892 \cdot 10^{30}$ kg

Masse des Lichtteilchens (hebt sich heraus):
m

Gravitationskonstante:
$G = 6.6743 \cdot 10^{-11} m^3 / kg s^2$

Radius des großen Körpers (Sonne):
$R = R_S = 696342\,km = 6.96342 \cdot 10^8 m$

Geschwindigkeit im Scheitel (Lichtgeschwindigkeit):
$V_0 = c = 299792.458\ km/s\ =\ 2.99792 \cdot 10^8 m/s$

Ablenkung durch die Sonne

$$\omega_S = 2\frac{M_S G}{c^2 R_S} = 2\frac{1.98892 \cdot 10^{30}\ 6.6743 \cdot 10^{-11}}{2.99792^2 \cdot 10^{16}\ 6.96342 \cdot 10^8}\frac{kg\ m^3\ s^2}{kg s^2\ m^2\ m}$$

Bogenmaß:
$\omega_S = 0.424219 \cdot 10^{-5}$
Winkelsekunden:
$\omega_S = 0.424219 \cdot 10^{-5} \cdot 3600 \cdot 180 / \pi = 0.875014 \approx 0.875''$

Vergleich mit Soldners Arbeit

Der direkte Vergleich mit Soldners Arbeit ist einigermaßen umständlich, weil die Bedeutung der Parameter g und v nicht recht klar ist, und weil der Radius R zu Eins normiert wurde. Es bestehen die folgenden Zusammenhänge (die Herkunft des Faktors 2 in 2g ist nicht bekannt):

$2g \leftrightarrow MG$
$v \leftrightarrow V_0 R$

Die Ablenkung am Rand der Sonne beträgt nach Gl.(34) ω_S = 0.875" und nach Einstein [3] exakt das Doppelte, also 1.75". Soldner [2] gibt an ω = 0.84" und meint damit wahrscheinlich ω_S. Der Unterschied mag auf kleine Abweichungen für die Lichtgeschwindigkeit, die Gravitationskonstante und den Sonnenradius zurückzuführen sein.

Auf der vorletzten Seite findet man bei Soldner als Endergebnis diese Beziehung:

$$\tan\omega = \frac{2g}{v\sqrt{v^2 - 4g}}$$

Mit obigen Substitutionen und $v^2 \gg 4g$ erhält man:

$$\tan\omega = \frac{MG}{V_0^2 R^2} \approx \omega$$

Das unterscheidet sich von Gl.(33) um den Faktor R im Nenner.

Referenzen

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

[2] https://de.wikisource.org/wiki/Ueber_die_Ablenkung_eines_Lichtstrals_von_seiner_geradlinigen_Bewegung

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Allgemeine_Relativit%C3%A4tstheorie#Lichtablenkung_und_Lichtverz%C3%B6gerung

[4] https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsnr.2020.0040

[5] https://sites.google.com/site/testsofphysicaltheories/deutsch/lichtablenkung

Dieses Dokument (zum Anklicken obiger Links):
[6] http://docs-hoffmann.de/soldner22092021.pdf

G.Hoffmann, 27.September 2021