Gernot Hoffmann

Segmentbögen – mathematische Betrachtungen

Einleitung

Segmentbögen sind Kreisbögen, deren Mittelpunkt unter der Basis liegt [1]. Brücken und Fensterstürze können diese Form haben. Besonders merkwürdig sind die sogenannten Kurvaturen in griechischen Tempeln [3]: scheinbar gerade Sockelbalken (Stylobate) oder Deckenbalken (Architrave), die aber an der Oberkante schwach gekrümmt sind. Der Mittelpunkt des Segmentbogens liegt dann weit außerhalb des Bauwerkes und kann daher für den Bau nicht herangezogen werden. Somit stellt sich die Frage, wie der Bogen dennoch vor Ort konstruiert werden kann, und zwar ausschließlich mit geometrischen Mitteln.

Die folgenden Erörterungen beruhen auf persönlichen Mitteilungen von *Volker Hoffmann*. Außerdem lagen Notizen von *P.Schellakowsky* zur Berechnung des Radius' des Bogens und der neuen Stichhöhe nach einer Unterteilung vor, sinngemäß wie im folgenden Abschnitt.

Radius und neue Stichhöhe

Gegeben ist die Basis AB mit der Breite 2a und die Stichhöhe s. Gesucht sind der Radius r und die neue Stichhöhe t nach der ersten Unterteilung.
Der Mittelpunkt M ergibt sich aus dem Schnitt der Mittelsenkrechten zu AS und BS, die man mit Kreisschlägen gewinnen könnte.
Ziel der Überlegungen ist es, weder den Mittelpunkt noch den Radius für die Konstruktion des Teilpunktes T mit der neuen Stichhöhe t zu verwenden.
Die Berechnungen sind aber nötig zur Beurteilung der Genauigkeit der Faustformel von *Volker Hoffmann*, nämlich $t = s/4$.

$\Delta AFS:$

(1) $(2b)^2 = a^2 + s^2$

$b^2 = \frac{1}{4}(a^2 + s^2)$

$\Delta AMG:$

$a^2 + (r-s)^2 = r^2$

$a^2 + r^2 - 2rs + s^2 = r^2$

(5) $r = (a^2 + s^2)/2s$

$\Delta GMS:$

(6) $(r-t)^2 + \frac{1}{4}(a^2 + s^2) = r^2$

$(r-t)^2 = r^2 - \frac{1}{4}(a^2 + s^2)$

$t = r \mp \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}(a^2 + s^2)}$

$t = r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}2rs}$

(10) $t = r(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}(s/r)}$

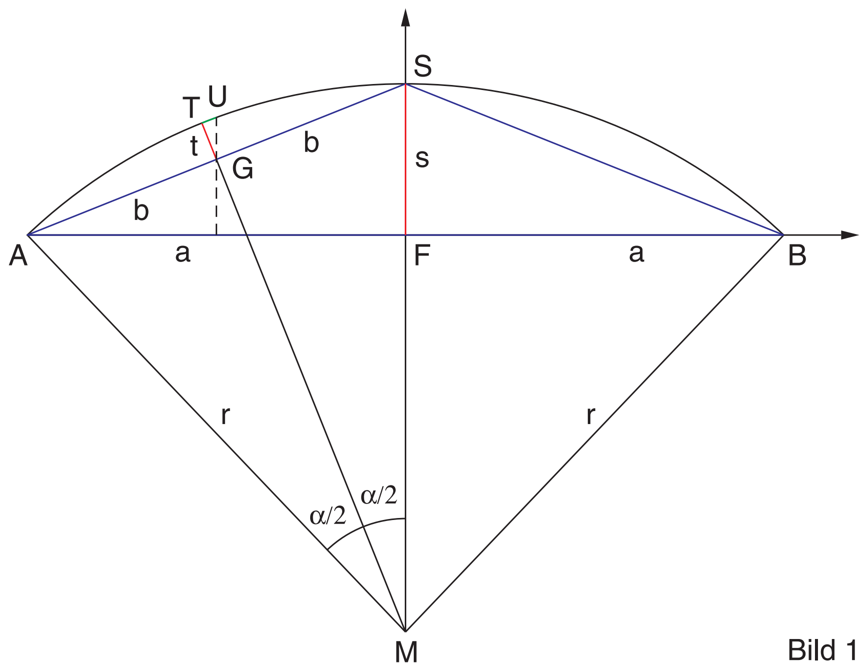

Bild 1

Wie man sieht, kann die Teilung rekursiv fortgesetzt werden, mit Gl.(10) oder mit $t = s/4$. Die alte Basis ist AB und AS, SB sind die neuen Basen. Diese Rekursion teilt das Kreissegment gleichmäßig, also linear.
Allerdings erhält man nur Teilungen durch 2,4,8,16 usw. Jedoch können mit dieser Methode Kreisschablonen für die Oberseite der Steine, speziell für die Tempel, hergestellt werden.
Aber auch die Basis AB kann linear geteilt werden, was für die Ausführung mit gleichbreiten Steinen bei Tempeln wichtig ist, indem man den Punkt U verwendet. U ist der Schnitt der Tangente in T mit der Senkrechten durch G. Die Tangente ist parallel zu AS.

Es muß nun gezeigt werden, wie genau die Faustformel $t=s/4$ ist. Dazu wird der Wurzelausdruck in Gl.(10) in eine Mac-Laurin-Reihe entwickelt [4]:

$$(11)\quad f(u) = \sqrt{1-u}$$

$$f'(u) = df(u)/du \quad \text{usw.}$$

$$f(u) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}u + \frac{f''(0)}{2!}u^2 + \frac{f'''(0)}{3!}u^3 + \dots$$

$$f(u) = (1-u)^{+1/2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(u) = -\tfrac{1}{2}(1-u)^{-1/2} \qquad f'(0)/1! = -\tfrac{1}{2}$$

$$f''(u) = -\tfrac{1}{4}(1-u)^{-3/2} \qquad f''(0)/2! = -\tfrac{1}{8}$$

$$f'''(u) = -\tfrac{3}{8}(1-u)^{-5/2} \qquad f'''(0)/3! = -\tfrac{3}{48}$$

$$f(u) = 1 - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 - \tfrac{3}{48}u^3 - \dots = 1 - \tfrac{1}{2}u + R_1$$

$$(19)\quad R_1^* = -\tfrac{1}{8}u^2$$

Anwendung der Reihenentwicklung auf Gl.(10):

$$(20)\quad t = r(1-\sqrt{1-\tfrac{1}{2}s/r}) = r(1-[1-\tfrac{1}{2}(s/2r)-\tfrac{1}{8}(s/2r)^2-\dots])$$

$$t = \tfrac{1}{4}s + \tfrac{1}{32}(s^2/r) + \dots = \tfrac{1}{4}s(1+\tfrac{1}{8}(s/r)+\dots)$$

$$t = t_0 + \Delta t = t_0(1+\Delta t/t_0)$$

$$t_0 = \tfrac{1}{4}s$$

$$(24)\quad \frac{\Delta t}{t_0} = \tfrac{1}{8}(s/r) = \tfrac{1}{8}(s/r)\,100\%$$

Das erste Glied der Reihe $t_0 = s/4$ ist die *Hoffmannsche* Faustformel. Das zweite Glied der Reihe gestattet die Abschätzung des Fehlers R_1^*. Das ist aber nicht das sogenannte Restglied R_1 der Reihe für die Entwicklung bis zum ersten Glied, weil danach weitere Summanden mit demselben Vorzeichen folgen (die Reihe alterniert nicht).
Besonders leicht kann man den relativen Fehler der neuen Stichhöhe mit Gl.(24) angeben.

Für s=0.1 und a=1 erhält man folgende Werte:

mit Gl.(5)	r = 5.05
mit Gl.(10)	t = 0.025062
rel. Fehler mit Gl.(24)	$\Delta t/t_0$ = 0.002475 = 0.25%
wahrer rel. Fehler	0.000062/0.025 = 0.002480 = 0.25%

Mit der Formel für das Restglied nach *Lagrange* [4] kann man den Fehler sicher abschätzen. Die Beziehungen ab Gl.(26) gelten für den Rest der Reihe beim Abbruch nach dem ersten Glied.
Der Parameter ξ liegt im gegebenen Intervall Gl.(28) und wird so gewählt, daß das Restglied betragsmäßig möglichst *groß* wird. Von Gl.(29) zu Gl.(30) gelangt man mit einer weiteren Reihenentwicklung.

$$(25)\quad R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}u^{n+1}$$

$$R_1 = \frac{f''(\xi)}{2!}u^2$$

$$f''(\xi) = -\tfrac{1}{8}(1-\xi)^{-3/2}u^2$$

$$(28)\quad 0 \le \xi \le u$$

$$R_1 = -\tfrac{1}{8}(1-u)^{-3/2}u^2$$

$$R_1 = -\tfrac{1}{8}u^2[1+\tfrac{3}{2}u]$$

$$(31)\quad \frac{\Delta t}{t_0} = +\tfrac{1}{8}(s/r)[1+\tfrac{3}{4}s/r]\,100\%$$

Die eckige Klammer in Gl.(31) enthält die Verbesserung gegenüber Gl.(24). Sie ist aber unwesentlich.

Koordinaten auf dem Segmentbogen

Die Basis AB wird in n Teile geteilt. Es gibt dann – für den Tempel – n Steine, die unten horizontal sind und oben entsprechend dem Segmentbogen gekrümmt. Jeder Stein hat die Breite dx.
Die Einteilung ist nach [5] mit Zirkel und Lineal möglich. Man muß lediglich eine grobe Näherung für dx wählen. Ein Maßstab wird nicht benötigt.

(32) $d = r - s$

$x^2 + (y + d)^2 = r^2$

$y = +\sqrt{r^2 - x^2} - d$

(35) $dx = 2a/n$

n gerade:

(36) $i = 0, \pm 1, \ldots, \pm n/2$

$x_i = i\,dx$

(38) $y_i = \sqrt{r^2 - x_i^2} - d$

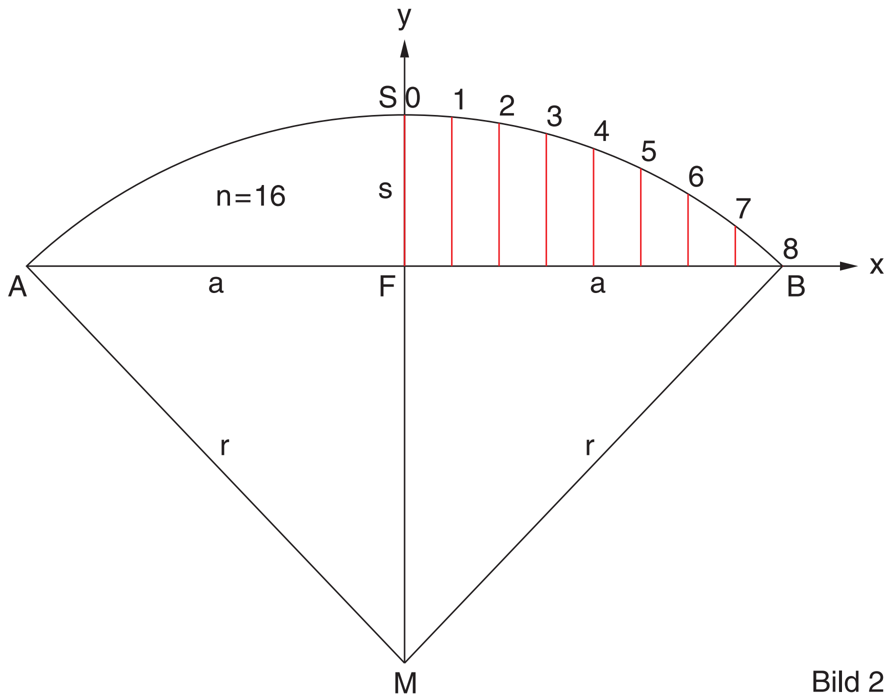

Bild 2

n ungerade:

(39) $i = \pm 1, \ldots, \pm (n+1)/2$

$x_i = (i - 1/2)dx \quad \text{für } i > 0$

$x_i = (i + 1/2)dx \quad \text{für } i < 0$

(42) $y_i = \sqrt{r^2 - x_i^2} - d$

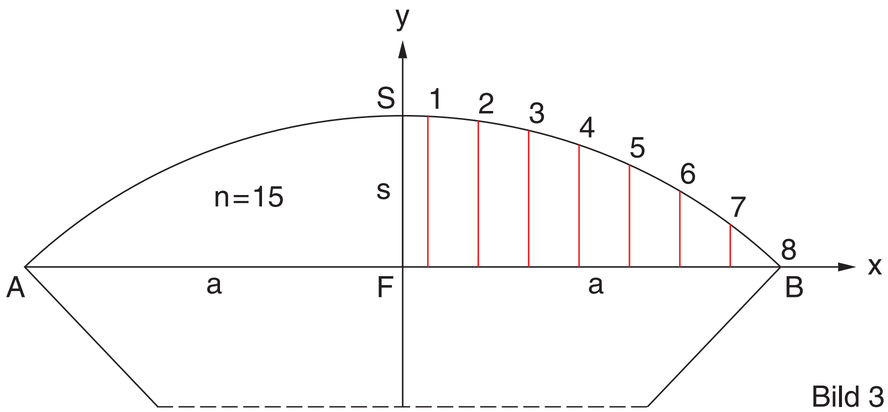

Bild 3

Konstanz der zweiten Differenzen

Volker Hoffmann hatte außerdem beobachtet, daß die Differenzen der Differenzen aufeinanderfolgender Punkte konstant sind.
Man kann beispielsweise die Punkte y_4, y_5, y_6 mit $y_{-1}=y(x_0\text{-}dx), y_0=y(x_0), y_1=y(x_0+dx)$ bezeichnen.

(43) $y''(x_0) = \dfrac{(y_1 - y_0) - (y_0 - y_{-1})}{dx^2} = \dfrac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{dx^2}$

$k = 1/r = \dfrac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$

$y'^2 \ll 1$:

(46) $k = y'' = 1/r = \text{konst.}$

Nach [6] erhält man eine Näherung für die zweite Ableitung $y''(x_0)$ der Funktion $y(x)$ aus der zweiten Differenz Gl.(43). Die Formel für die Krümmung $k=1/r$ nach [4] enthält im Zähler y''.
Die Krümmung für das Kreissegment ist konstant. Wenn im Nenner von Gl.(44) $y'^2 \ll 1$ gilt, dann ist die zweite Ableitung $y''=k$ konstant und damit auch die zweite Differenz (als Näherung für die zweite Ableitung).

Die mittlere Steigung hat den Betrag y' = s/a. Der Betrag der Steigung ist bei x=±a größer und in der Mitte Null.
Die folgende Tabelle zeigt die Funktionswerte sowie die ersten und die zweiten Differenzen für x≥0 für den Fall a =1 und s= 0.1 (oben) und s=0.02 (unten).

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.100000	0.098453	0.093808	0.086057	0.075186	0.061175	0.043996	0.023618	0.000000
-0.001547	-0.004644	-0.007751	-0.010871	-0.014011	-0.017179	-0.020379	-0.023618	
-0.003097	-0.003107	-0.003120	-0.003140	-0.003167	-0.003200	-0.003239		

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.020000	0.019688	0.018751	0.017189	0.015001	0.012190	0.008753	0.004688	0.000000
-0.000313	-0.000937	-0.001562	-0.002188	-0.002811	-0.003437	-0.004065	-0.004688	
-0.000624	-0.000626	-0.000626	-0.000624	-0.000626	-0.000628	-0.000624		

Referenzen

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Segmentbogen

[2] http://www.bswals.at/wrl-m/bogen/segbo/segre.htm

[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Griechische_Architektur

[4] Bronstein, I.N., Semendjajev, K.A., Taschenbuch der Mathematik,
Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt/Main, 1973

[5] http://www.mathopenref.com/constdividesegment.html

[6] Schwarz, H.R., Numerische Mathematik,
B.G.Teubner, Stuttgart, 1993

[7] http://docs-hoffmann.de/
http://docs-hoffmann.de/howww41a.html
Verfasser

[8] Dieses Dokument
http://docs-hoffmann.de/segment22082012.pdf

Alle Farben und schwarz sind als CMYK-Werte definiert

Fassung 22. August 2012
Fassung 26. Januar 2013
Fassung 25. März 2017 ohne inhaltliche Änderung