

Digitale Approximation kontinuierlicher Übertragungssysteme (QTA-Verfahren)

Digital approximation of continuous transfer systems (QTA-methods)

G. Hoffmann, Emden

Praktiker bevorzugen zur Erprobung experimenteller Regler an Simulatoren oder echten Regelstrecken analoge Übertragungssysteme (Filter) anstelle von Digitalrechnern.

Für die endgültige Realisierung auf einem Prozeßrechner müssen die Analogfilter in gleichwertige Abtastfilter umgesetzt werden.

Der Verfasser gibt einige Hinweise auf bekannte Ansätze für derartige Transformationen und stellt dann sein „QTA-Verfahren“ zur Approximation kontinuierlicher Filter durch Abtastfilter im Frequenzbereich vor. Die Abkürzung „QTA“ bedeutet „Quotienten-Transversalfilter-Approximation“.

Die Anwendung wird an einem Tiefpaßfilter, an einem PID-Regler und am Entwurf von Differenzierern höherer Ordnung demonstriert. Die bewährten Sekanten- und Parabel-Differenzierer sind in der Schar der Lösungen enthalten.

Am Beispiel der PD-Regelung eines Doppelintegrators zeigt sich, daß Differenzierer höherer Ordnung besser stabilisieren.

Practitioners prefer analog transfer systems (filters) to digital computers for the test of experimental controllers with simulators or real plants.

The analog filters must be converted to equivalent sampling filters for the final implementation on a process computer.

The author gives some ^{hints} to known approaches for these transformations and introduces a „QTA-method“ for the approximation of continuous filters by sampling filters in the frequency domain. The abbreviation „QTA“ means „quotient transversal filter approximation“.

The application is demonstrated using a low pass filter, a PID controller, and the design of higher order differentiators. The proven secant and parabola differentiators are contained in the solution set.

Using the example of the PD control of a double integrator it is shown that differentiators of higher orders yield better stability.

1. Einführende Übersicht

Ein Digitalfilter $G(z^{-1})$ verarbeitet die Abtastwerte $x(t - kT)$ des Eingangssignals $x(t)$ und seine eigenen Ausgangssignale $y(t - kT)$ zu einem neuen Ausgangssignal $y(t)$. T ist die Abtastzeit und der Index $k = 0, 1, \dots$

gibt an, um wie viele Schritte T der verwendete Funktionswert zurückliegt.

Der Operator z^{-1} steht hier als Abkürzung für die in den Bildraum der Laplace-Transformation projizierte Zeitverschiebung (kT) der abgetasteten Funktionen $x(t - kT)$ und $y(t - kT)$:

$$z^{-k} = e^{-ksT} \quad (1)$$

Die Rechenvorschrift für den Abtast-Algorithmus $G(z^{-1})$ lautet:

$$c_0 y(t) = -c_1 y(t - T) - \dots - c_m y(t - mT) + d_0 x(t) + d_1 x(t - T) + \dots + d_n y(t - nT) \quad (2)$$

Beispielsweise ist $G(z^{-1})$ ein digitaler Regler im Vorwärtszweig für eine kontinuierliche Strecke $R(s)$. Eingang des Reglers ist die abgetastete Regelabweichung $x(t - kT)$. Sein Ausgangssignal $y(t)$ wird in einem Digital-Analog-Wandler (Halteglied H) treppenstufenartig interpoliert und als Steuersignal $u(t)$ auf die Regelstrecke geschaltet.

$G(z^{-1})$ bestimmt die Stabilität und die Schnelligkeit des Regelkreises. Der Entwurf derartiger Systeme kann mit klassischen Verfahren im Frequenzbereich vorgenommen werden (Bode- und Nyquist-Diagramme). Eine andere Vorgehensweise besteht darin, daß der Regler im Experiment an die echte Regelstrecke angepaßt wird. Man erhält in beiden Fällen zunächst den kontinuierlichen Regler $F(s)$ anstelle eines Abtastsystems $G(z^{-1})$.

Der Regler $F(s)$, zum Beispiel ein PID-Regler, hat Parameter mit vorhersehbarer physikalischer Bedeutung. Die Parameter im Abtastregler $G(z^{-1})$ sind dagegen in ihrer Wirkung schwer abschätzbar und somit zur experimentellen Regleroptimierung ungeeignet.

Für die Umsetzung des Analogfilters in ein Digitalfilter gibt es kein eindeutiges Verfahren. Unterschiedliche Algorithmen führen zu abweichendem dynamischen Verhalten im Bereich hoher Signalfrequenzen.

Zur digitalen Approximation der exakten Integration $F(s) = 1/s$ können die Verfahren der numerischen Integration verwendet werden (z. B. Eulerformel, Verfahren von Heun, Runge-Kutta-Formeln). Alle diese Verfahren sind als Abtast-Algorithmen darstellbar (siehe *W. Jentsch* [1]).

Als Ersatz für die Differentiation $F(s) = s$ sind weit weniger Methoden bekannt, zum Beispiel die Sekanten- und Parabel-Differentiation. Durch zwei oder drei Abtastwerte wird eine Gerade oder Parabel gelegt, deren Steigerung im letzten Abtastzeitpunkt die gesuchte Ableitung liefert.

Die Anwendung derartiger Differenzierer in der Regelungstechnik wird z. B. bei O. Föllinger [2] beschrieben. Eine umfassende Darstellung vieler Methoden für die Transformation von Analogfiltern in Abtastsysteme gibt H. Hanselmann [3].

Am einfachsten zu handhaben sind die Substitutionsmethoden. Hierbei wird der Operator s durch einen Näherungsdifferenzierer oder der Operator $1/s$ durch einen Näherungsintegrierer ausgetauscht, wobei die beiden Ersatzfunktionen a priori als Abtastsysteme erklärt sind.

Die Übertragungsfunktion für einen Sekanten-Differenzierer lautet:

$$D1(z^{-1}) = (1/T)(1 - z^{-1}). \tag{3}$$

Der Ersatz von s in $F(s)$ durch $D1(z^{-1})$ liefert sofort eine Approximation $G(z^{-1})$ für das Analogfilter.

Beim Parabel-Differenzierer muß s durch $D2(z^{-1})$ substituiert werden:

$$D2(z^{-1}) = (1/T)(1,5 - 2,0 z^{-1} + 0,5 z^{-2}). \tag{4}$$

Offensichtlich müssen Differenzierer höherer Ordnung existieren. Die Frage wird im Abschnitt 4 geklärt.

Ein weiteres Substitutionsverfahren ist die sogenannte Bilinear-Transformation, die bei R. Best [4] besonders verständlich eingeführt wird. Die Transformationsformel lautet:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \tag{5}$$

Hiermit wird die Frequenzachse im Bereich Null bis Unendlich auf den Bereich 0 bis $F/2$ gestaucht, wobei die folgende Beziehung zwischen der Originalfrequenz f und der neuen Frequenz f' im Abtastsystem besteht:

$$f'/F = (1/\pi) \arctan(\pi f/F) \tag{6}$$

Für Frequenzen weit unter der halben Abtastfrequenz $F/2$ ist der Maßstab praktisch unverzerrt. Das Verfahren ist in vielen Fällen sehr praktikabel. In der Nähe der halben Abtastfrequenz muß jedoch die Verzerrung anhand der Berechnung und Aufzeichnung des Frequenzganges von $G(z^{-1})$ geprüft werden.

Die besondere Schwäche der Bilinear-Transformation zeigt sich bei der Anwendung auf den exakten Differenzierer: Bei der halben Abtastfrequenz erhält man wegen der Frequenzstauchung beliebig große Amplituden. Deshalb kann dieser Differenzierer nicht in einem Regelkreis verwendet werden.

In vielen Arbeiten, beispielsweise [3] und [5], wird für die numerische Integration die Trapez-Formel vorgeschlagen. Diese ist mit der Bilinear-Transformation identisch ($1/s$ wird durch den Kehrwert von Gl. (5) ersetzt).

Generell darf dabei der Zählergrad von $F(s)$ nicht größer sein als der Nennergrad, so daß der ideale Differenzierer mit diesen Verfahren nicht behandelt werden kann.

Das Problem der Differenzierer-Approximation war der Ausgangspunkt für die Entwicklung des QTA-Verfahrens, die Anwendung auf allgemeine Übertragungsfunktionen ergab sich folgerichtig.

2. Digitale Approximation kontinuierlicher Filter (QTA-Verfahren)

a) Definition der Aufgabe

Gegeben ist eine kontinuierliche Übertragungsfunktion $F(s)$:

$$F(s) = \frac{\sum_{k=0}^q b_k s^k}{\sum_{k=0}^p a_k s^k}. \tag{7}$$

Die Ordnungen p und q des Nenners und des Zählers unterliegen keinen Beschränkungen. Es darf durchaus q größer als p sein.

Es ist nicht von Bedeutung, ob die Übertragungsfunktion $F(s)$ als Filter oder als Regler verwendet wird.

Das zugehörige Abtastfilter ist ein allgemeines Rekursivfilter. Es kann auch als Quotient zweier Transversalfilter aufgefaßt werden:

$$G(z^{-1}) = \frac{\sum_{k=0}^n d_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^m c_k z^{-k}}. \tag{8}$$

Die Ordnungen m und n des Nenners und des Zählers sind noch frei verfügbar, sollten aber nicht kleiner sein als die korrespondierenden Ordnungen p und q im Nenner und im Zähler von $F(s)$.

Nach Gl. (1) ist der Operator z^{-k} nur eine Abkürzung für die in den Bildraum der Laplace-Transformation projizierte Zeitverschiebung (kT) der abgetasteten Funktion. Es ist T die Zeit zwischen zwei Abtastungen und $F = 1/T$ die Abtastfrequenz (nicht zu verwechseln mit dem Frequenzgang $F(s)$).

Unter Verwendung von Gl. (1) in Gl. (8) wird deutlich, daß man $G(z^{-1})$ als Funktion $G'(s)$ auffassen darf. Dies ist die Grundlage für die Approximation von $F(s)$ durch $G(z^{-1})$, wobei $s = j\omega$ als unabhängige Variable für beide Funktionen dient.

Zähler und Nenner in $F(s)$ bzw. in $G(z^{-1})$ sollen unabhängig voneinander behandelt werden. Es wird somit keine Rücksicht auf gemeinsame Linearfaktoren genommen. Dann können im Frequenzbereich durch zweckmäßige Wahl von d_k die Zähler und durch Wahl von c_k die Nenner von $G(z^{-1})$ und $F(s)$ möglichst gut angeglichen werden.

b) Transversalfilter-Approximation

Im ersten Schritt wird der Zähler von $F(s)$ durch den Zähler von $G(z^{-1})$ approximiert. Zur Darstellung im Frequenzbereich wird $s = j\omega$ gesetzt und der Totzeitoperator durch Winkelfunktionen substituiert.

$$z^{-k} = e^{-ksT} = \cos k\omega T - j \sin k\omega T. \tag{9}$$

Außerdem wird die Kreisfrequenz normiert:

$$X = \omega T = \omega / F. \tag{10}$$

Der Zähler von $G(z^{-1})$

$$\sum_{k=0}^n d_k e^{-ksT} = \sum_{k=0}^n d_k (\cos kX - j \sin kX) \tag{11}$$

wird in der Umgebung $x = 0$ in Potenzreihen entwickelt:

$$\begin{aligned} & d_0 + d_1 (1 - (X)^2/2! + (X)^4/4! - \dots) - \\ & - j d_1 (X - (X)^3/3! + (X)^5/5! - \dots) + \\ & + d_2 (1 - (2X)^2/2! + (2X)^2/4! - \dots) - \\ & - j d_2 (2X - (2X)^3/3! + (2X)^5/5! - \dots) + \\ & \dots \\ & + d_n (1 - (nX)^2/2! + (nX)^4/4! - \dots) - \\ & - j d_n (nX - (nX)^3/3! + (nX)^5/5! - \dots) \end{aligned} \tag{12}$$

Sodann wird nach Potenzen von X geordnet:

$$\begin{aligned} & X (d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n) \\ & X^1 (d_0 + 1^1 d_1 + 2^1 d_2 + \dots + n^1 d_n) (-j) / 1! + \\ & + X^2 (1^2 d_1 + 2^2 d_2 + \dots + n^2 d_n) (-1) / 2! + \\ & \dots \\ & + X^n (1^n d_1 + 2^n d_2 + \dots + n^n d_n) (j)^n / n! \end{aligned} \tag{13}$$

Im nächsten Schritt wird die rechte Seite, der Zähler der Übertragungsfunktion $F(s)$, ebenfalls nach Potenzen von X entwickelt:

$$\sum_{k=0}^q b_k s^k = \sum_{k=0}^q b_k (j\omega)^k, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^q b_k s^k &= b_0 + j b_1 X F - b_2 X^2 F^2 + \\ & + \dots + (j)^q X^q F^q, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\sum_{k=0}^q b_k s^k = \sum_{k=0}^n b_k (j)^k X^k F^k. \tag{16}$$

Der Index k soll wie beim Zähler des Abtastsystems von 0 bis n laufen, wobei für den Fall $n > q$ die Koeffizienten b_k mit Index $k > q$ zu Null gesetzt werden.

In der abgebrochenen Reihe für das Abtastsystem und in der endlichen Reihe für die kontinuierliche Übertragungsfunktion werden die Koeffizienten gleicher Potenzen von X gleichgesetzt. Die komplexe Einheit j hebt sich heraus, es bleibt aber beim Abtastsystem ein zeilenweise wechselndes Vorzeichen übrig. Insgesamt erhält man das folgende lineare Gleichungssystem für die unbekanntenen Koeffizienten d_k :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1^1/1! & -2^1/1! & \dots & -n^1/1! \\ 0 & 1^2/2! & 2^2/2! & \dots & n^2/2! \\ \dots & & & & \\ 0 & \pm 1^n/n! & \pm 2^n/n! & \dots & \pm n^n/n! \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 F^1 \\ b_2 F^2 \\ \dots \\ b_n F^n \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Die Systemmatrix und die Spaltenmatrizen werden sinnfälligerweise mit N , d und b bezeichnet.

Abgesehen von der ersten Zeile und der ersten Spalte werden die Elemente der Systemmatrix nach dem folgenden Bildungsgesetz berechnet:

$$N(i, j) = (-1)^i (j)^i (1/i!). \tag{18}$$

Das lineare Gleichungssystem hat die Lösung

$$d = N^{-1} b. \tag{19}$$

Die Inverse von N hängt nur von der Ordnung n ab, nicht von den Koeffizienten b . Man kann also vorab eine Datei von Inversen bis zur gewünschten maximalen Ordnung anlegen. Numerische Schwierigkeiten treten dabei nicht auf.

c) Quotienten-Transversalfilter-Approximation

Nach der Approximation des Zählers wendet man das gleiche Verfahren auf den Nenner der Übertragungsfunktionen $F(s)$ und $G(z^{-1})$ an:

$$c = M^{-1} a. \tag{20}$$

Die Systemmatrix M ist mit N identisch, gleiche Ordnung $n = m$ vorausgesetzt. Die Spaltenmatrix a enthält die mit den Potenzen von F multiplizierten Nennerkoeffizienten von $F(s)$, und c besteht aus den Nennerkoeffizienten von $G(z^{-1})$.

Die Multiplikation mit höheren Potenzen der nicht normierten Frequenz F ist in numerischer Hinsicht problematisch. Die Fragen der zweckmäßigen Skalierung werden aus Platzmangel nicht behandelt.

Da der numerische Algorithmus sehr einfach ist – nichts weiter als die Lösung linearer Gleichungssysteme mit a priori bekannter Systemmatrix – kann man zu jeder gegebenen Übertragungsfunktion mehrere Approximationen in aufsteigender Ordnung berechnen.

Welche der Approximationen für einen bestimmten Zweck besonders günstig ist, muß anhand der Analyse des resultierenden Frequenzganges untersucht werden. Hierzu ist ein komfortables Programm mit Grafik-Ausgabe für die Untersuchung kontinuierlicher und abgetasteter Systeme im Frequenzbereich notwendig, zum Beispiel das Programmpaket FUNLIS/F [7] des Verfassers.

Man muß sich nicht von vornherein auf die Ordnung des Zählers und des Nenners des Abtastsystems festlegen. Die Zähler und die Nenner dürfen aus unterschiedlichen Approximationsordnungen „gemischt“ werden. Der so gewonnene Freiheitsgrad ist kein Mangel, sondern ein essentieller Bestandteil des Verfahrens und von Anfang an beabsichtigt.

3. Allgemeine Beispiele

a) Butterworth-Tiefpaß 4. Ordnung

Der Butterworth-Tiefpaß 4. Ordnung besteht nach [6] aus zwei in Reihe geschalteten gedämpften Oszillatoren mit der Gesamt-Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{1}{1 + 1,8478s + s^2} \frac{1}{1 + 0,7654s + s^2} \quad (21)$$

Die Eckfrequenz (Amplitude -3 dB, Phase -180 Grad) liegt für diese Normierung bei $f_0 = 1/2\pi \text{ Hz} = 0,159 \text{ Hz}$.

Zum Test des QTA-Verfahrens wird der Nenner zu einem Polynom vierter Ordnung ausmultipliziert:

$$F(s) = \frac{1}{1 + 2,6132s + 3,4143s^2 + 2,6132s^3 + s^4} \quad (22)$$

Die Abtastfrequenz soll zwanzigmal größer sein als die Eckfrequenz ($F = 20f_0 = 3,1831 \text{ Hz}$, $T = 1/F = 0,314 \text{ s}$).

Im Bild 1 findet man die Zähler- und Nennerkoeffizienten für die Approximation des Abtastfilters mit dem QTA-Verfahren bis zur achten Ordnung. Zur Skalierung wurde durch Zehnerpotenzen gekürzt, so daß der Zähler nicht immer gleich Eins ist.

Bild 2 zeigt den Amplitudengang und den Phasengang für das Analogfilter (Index 0) und die drei Abtastfilter (Index 4 bis 6). Die Betragskennlinie verläuft unter -40 dB regulär und ist zwecks besserer Darstellung des übrigen Bereichs abgeschnitten.

Alle Filter sind verwendbar, haben aber etwas unterschiedliche Eigenschaften. Bemerkenswert ist die sehr gu-

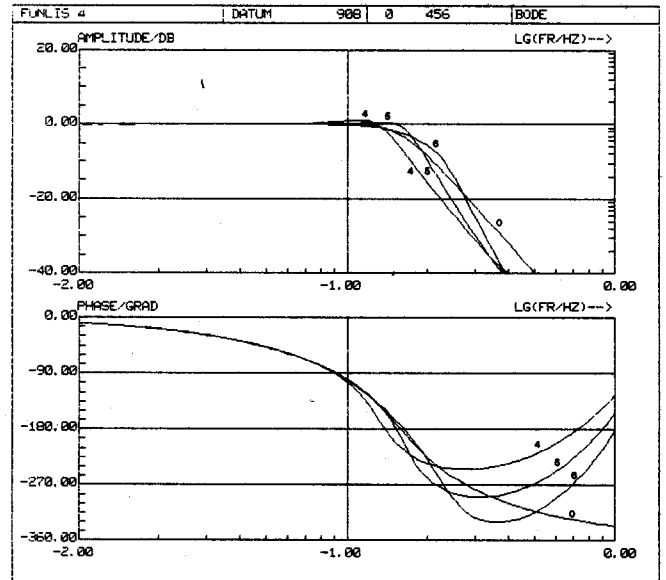


Bild 2. Bode-Diagramm für einen Butterworth-Tiefpaß 4. Ordnung (Abtastfrequenz 1 Hz).

te Approximation des Phasengangs im Durchlaßbereich, was für regelungstechnische Anwendungen besonders wichtig ist. Mit zunehmender Ordnung des Abtastfilters wächst der Gradient der Sperrdämpfung, vergleichbar einem Analogfilter höherer Ordnung.

b) PID-Regler mit Tiefpaß 2. Ordnung

Die folgende Übertragungsfunktion beschreibt die Reihenschaltung eines PID-Reglers und eines Butterworth-Tiefpasses 2. Ordnung.

Die integrierenden, proportionalen und differenzierenden Abschnitte der Kennlinie sind in regelungstechnischer

KOEFFIZIENTEN FÜR ABTASTFILTER D / C :

	1	2	3	4	5	6	7	8
D 0 :	1.000000	1.000000	0.100000	0.010000	0.010000	0.001000	0.001000	0.001000

KOEFFIZIENTEN FÜR ABTASTFILTER D / C :

	1	2	3	4	5	6	7	8
C 0 :	9.318073	48.071222	16.971812	4.325930	8.159225	1.292578	1.839052	2.429397
C 1 :	-8.318073	-85.824375	-45.076494	-15.022613	-34.188847	-6.278724	-10.105087	-14.844331
C 2 :	0	38.753147	40.369367	19.809356	58.141527	12.963628	24.445457	41.075878
C 3 :	0	0	-12.164690	-11.731398	-50.063343	-14.538860	-33.679199	-67.005643
C 4 :	0	0	0	2.628727	21.794595	9.328800	28.472557	70.193939
C 5 :	0	0	0	0	-3.833159	-3.243038	-14.731049	-48.147535
C 6 :	0	0	0	0	0	0.476619	4.306451	21.030054
C 7 :	0	0	0	0	0	0	-0.547178	-5.328804
C 8 :	0	0	0	0	0	0	0	0.598047

Bild 1. QTA-Approximation für einen Butterworth-Tiefpaß 4. Ordnung (Abtastfrequenz 1 Hz).

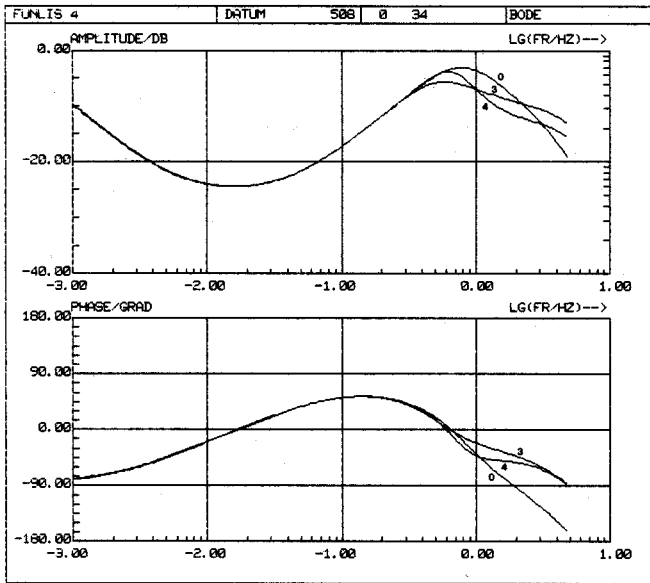


Bild 3. Bode-Diagramm für einen PID-Regler mit Tiefpaß 2. Ordnung (Abtastfrequenz 10 Hz).

Hinsicht wichtig, während der Tiefpaß in Hinblick auf die Realisierbarkeit bei Anwesenheit von Meßrauschen eingefügt wurde.

$$F(s) = \left(\frac{0,002}{s} + 0,06 + 0,2s \right) \frac{25}{25 + 7,07s + s^2} \quad (23)$$

Die Eckfrequenz f_0 des Tiefpaßfilters liegt bei 0,8 Hz. Zur Anwendung des QTA-Verfahrens werden der Zähler und der Nenner ausmultipliziert:

$$F(s) = \frac{0,05 + 1,50s + 5s^2}{25s + 7,07s^2 + s^3} \quad (24)$$

Bild 3 zeigt den Amplitudengang und den Phasengang für das Analogfilter (Index 0) und die Approximationen 3.

KOEFFIZIENTEN FÜR ABTASTFILTER D / C :

	1	2	3	4	5	6	7	8
D 0 :	1.000000	1.500000	1.893395	2.089340	2.289357	2.450046	2.592597	2.715195
D 1 :	-1.000000	-2.000000	-3.000004	-4.000021	-5.000095	-6.000195	-6.998345	-7.982579
D 2 :	0	0.500000	1.500004	3.000027	5.000158	7.500362	10.495562	13.949389
D 3 :	0	0	-0.333395	-1.333349	-3.333467	-6.667032	-11.660096	-18.581409
D 4 :	0	0	0	0.250003	1.250057	3.750210	8.744180	17.408968
D 5 :	0	0	0	0	-0.200010	-1.200067	-4.194910	-11.136918
D 6 :	0	0	0	0	0	0.166676	1.165752	4.638949
D 7 :	0	0	0	0	0	0	-0.142741	-1.135800
D 8 :	0	0	0	0	0	0	0	0.124204

KOEFFIZIENTEN FÜR ABTASTFILTER D / C :

	1	2	3	4	5	6	7	8
C 0 :	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

und 4. Ordnung (Index 3 und 4). Die Abtastfrequenz ist $F = 10$ Hz.

Die beiden Abtastsysteme ersetzen das Analogfilter im regelungstechnisch wichtigen Frequenzbereich präzise und sind bei Frequenzen über 1 Hz sogar besser, weil trotz merklicher Sperrdämpfung die Phasenabsenkung kleiner ist.

4. Digitale Differentiation

a) Differentiation mit Transversalfiltern

In diesem Abschnitt wird die digitale Approximation der exakten Differentiation $F(s) = s$ untersucht.

Das QTA-Verfahren liefert Transversalfilter erster bis achter Ordnung nach Bild 4, wobei die Abtastfrequenz 1 Hz beträgt. Die Filter erster und zweiter Ordnung sind die Sekanten- und Parabel-Differenzierer.

Eine nachträgliche Analyse zeigt, daß die Koeffizienten d_k unter Verwendung der Binomialkoeffizienten $B(k)$ folgendermaßen berechnet werden können:

$$d_k = (-1)^k B(k)/k$$

für

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad (25)$$

$$d_0 = - \sum_{k=1}^n d_k. \quad (26)$$

Die Beziehung für d_0 ergibt sich aus der Sprungantwort des Differenzierers n -ter Ordnung: Nach n Abtastschritten muß die Sprungantwort verschwinden.

Für die grafischen Darstellungen wird ein zusätzlicher Faktor so eingeführt, daß die Betragskennlinie im Bode-Diagramm die Null-dB-Linie bei der Frequenz 1 Hz schneidet ($F(s) = s/2\pi$).

Bild 4. QTA-Approximation für Transversal-Differenzierer 1. bis 8. Ordnung (Abtastfrequenz 1 Hz).

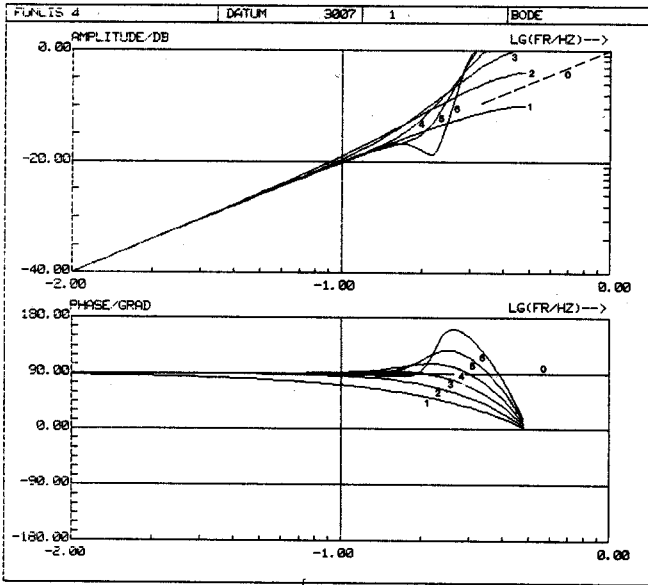


Bild 5. Bode-Diagramm für die skalierten Transversal-Differenzierer 1. bis 6. Ordnung (Abtastfrequenz 1 Hz).

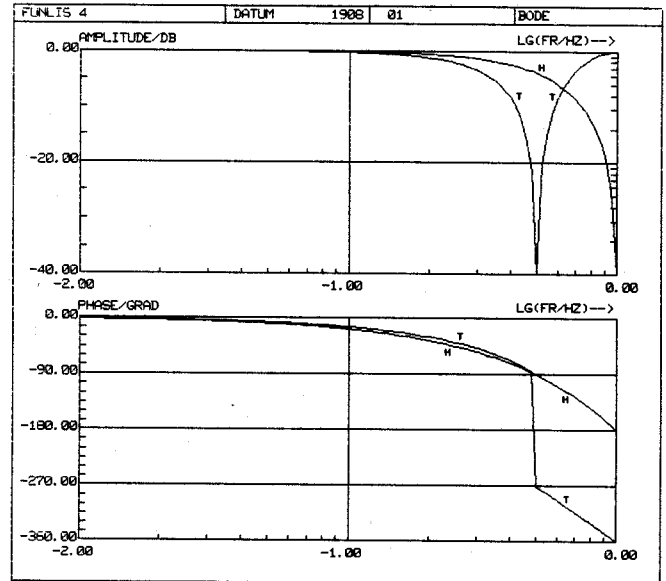


Bild 6. Bode-Diagramm für das Halteglied (H) und den Bilinear-Tiefpaß (T) (Abtastfrequenz 1 Hz).

Bild 5 zeigt den Amplitudengang und den Phasengang für dieses Analogfilter (Index 0) und die zugehörigen Approximationen erster bis sechster Ordnung. Mit wachsender Ordnung erhält man eine starke Amplitudenüberhöhung in der Nähe der halben Abtastfrequenz. Andererseits wird bei niedrigeren Frequenzen der Phasenwinkel 90 Grad besonders gut eingehalten.

Die Filter dritter und vierter Ordnung haben eine Amplitudenüberhöhung und einen positiven Phasenverhalt im Vergleich zum idealen Differenzierer. Man kann daher durch ein zusätzliches Tiefpaßfilter die Übertragungsfunktion besser an den idealen Differenzierer anpassen und den Amplitudengang in der Umgebung der halben Abtastfrequenz absenken.

b) Transversal-Differenzierer mit Bilinear-Tiefpaß

Zunächst noch eine Bemerkung zur Realisierbarkeit von Differenzierern: Ist das Eingangssignal des Digitalfilters nicht spektral auf Frequenzen unter $F/2$ begrenzt, so muß die Überlappung mit den Aliasing-Nebenspektren $F(j(f-kF))$ beachtet werden, wobei das Nebenspektrum für $k = 1$ besonders wichtig ist.

In Regelungssystemen wird die spektrale Begrenzung im Grundspektrum überwiegend von der Regelstrecke besorgt, die in der Umgebung von $F/2$ in den meisten Fällen mindestens doppelt integrierend ist, während die Nebenspektren für die Ordnungen $k > 1$ und $k < 0$ schon durch die Filterwirkung des Haltegliedes (einschließlich Abtaster) stark beschnitten werden. Das Halteglied hat die bekannte Kennlinie $|\sin(\pi f/F)|/(\pi f/F)$ mit Amplituden-Nullstellen bei allen Vielfachen der Abtastfrequenz außer bei Null (Kurve H im Bild 6). Die Absenkung des Amplitudengangs in der Nähe der halben Abtastfrequenz ist

somit nicht generell notwendig, wohl aber zweckmäßig, um das unvermeidliche Signalrauschen nicht unnötig zu verstärken.

Schon für den einfachsten analogen Tiefpaß, das Filter erster Ordnung mit der Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{\omega_0}{\omega_0 + s}, \quad (27)$$

bewirkt die Substitution von s durch den Operator der Bilinear-Transformation nach Gl. (5) eine Absenkung der Amplitude bei $F/2$ auf Null, weil der Betrag des Analogfilters für unendliche große Frequenzen hierhin projiziert wird.

Das zugehörige Abtastfilter hat dann die Übertragungsfunktion

$$G_T(z^{-1}) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 2/(\omega_0 T) + (1 - 2/(\omega_0 T))z^{-1}}. \quad (28)$$

Die nominelle Eckfrequenz $f_0 = \omega_0/2\pi$ wird willkürlich zu $0,4 F$ angesetzt und man erhält den folgenden von der Abtastfrequenz unabhängigen „Bilinear-Tiefpaß“, mit dem die Transversal-Differenzierer multipliziert werden sollen:

$$G_T(z^{-1}) = \frac{1 + z^{-1}}{1,7958 + 0,2042 z^{-1}}. \quad (29)$$

Die Kurve T im Bild 6 zeigt den Amplitudengang und den Phasengang für den Tiefpaß. Die tatsächliche Eckfrequenz liegt bei f'_0 :

$$f'_0/F = (1/\pi) \arctan(\pi f_0/F) = 0,286. \quad (30)$$

Bild 7 zeigt den Amplitudengang und den Phasengang für die Reihenschaltung des Bilinear-Tiefpaß-Filters und der verschiedenen Transversal-Differenzierer.

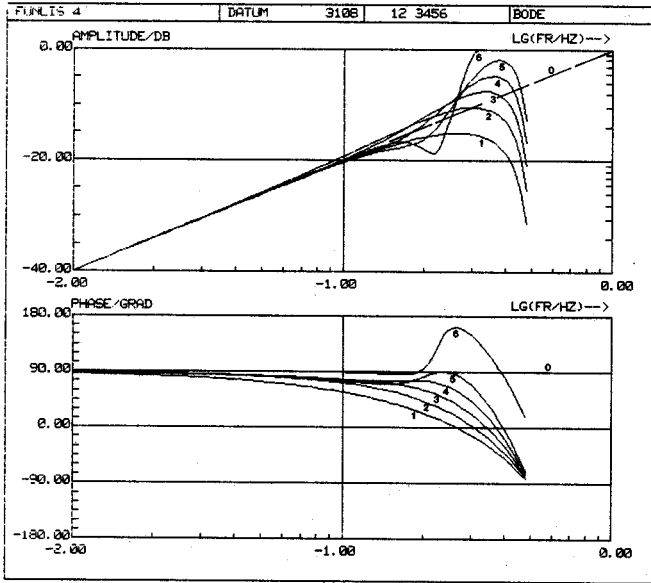


Bild 7. Bode-Diagramm für die Transversal-Differenzierer mit Bilinear-Tiefpaß (Abtastfrequenz 1 Hz).

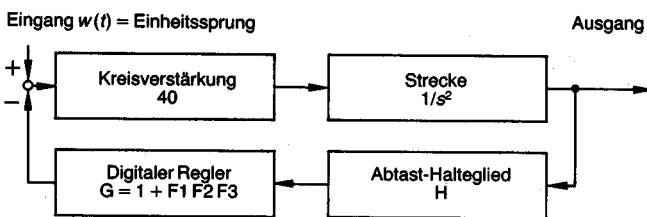
Die Auswahl des am besten geeigneten Differenzierers hängt vom Verhalten der Regelstrecke zwischen $F/10$ und $F/2$ ab, sofern die Eckfrequenz des geschlossenen Kreises möglichst hoch sein soll.

c) Anwendung digitaler Differenzierer höherer Ordnung

Ein einfaches Beispiel soll die Anwendung der Differenzierer höherer Ordnung deutlich machen: Bild 8 zeigt die Regelung eines Doppelintegrators. Der Regler nebst Abtast-Halteglied befindet sich hier nicht im Vorwärtszweig, sondern in der Rückführung. Wird die Reihenschaltung $F2F3$ durch einen exakten Differenzierer ersetzt, so erhält man einen idealen PD-Regler in der Rückführung, den man (ohne Abtastung) als Zustandsregler mit Weg- und Geschwindigkeitsaufschaltung interpretieren kann.

Mit $F1=2,25$ und mit der Kreisverstärkung $K=40$ hat der geschlossene Kreis PT2-Verhalten mit der Kennfrequenz (ungedämpft) 1 Hz und dem Dämpfungsgrad 0,707.

Im Abtastregler werden die Transversal-Differenzierer erster bis vierter Ordnung nebst Bilinear-Tiefpaß aus Abschnitt 4b (Kennziffer 1 bis 4) verwendet. Jedoch beträgt die Abtastrate nun 10 Hz statt 1 Hz.



F1: D-Verstärkung, $F1 = 2,25$,
 F2: Digitale Differenzierer 1. bis 4. Ordnung,
 F3: Bilinear-Tiefpaß (Eckfrequenz = 0,4 Abtastfrequenz),
 G: Digitaler Regler.

Bild 8. Digitaler Regler für eine doppel-integrierende Strecke.

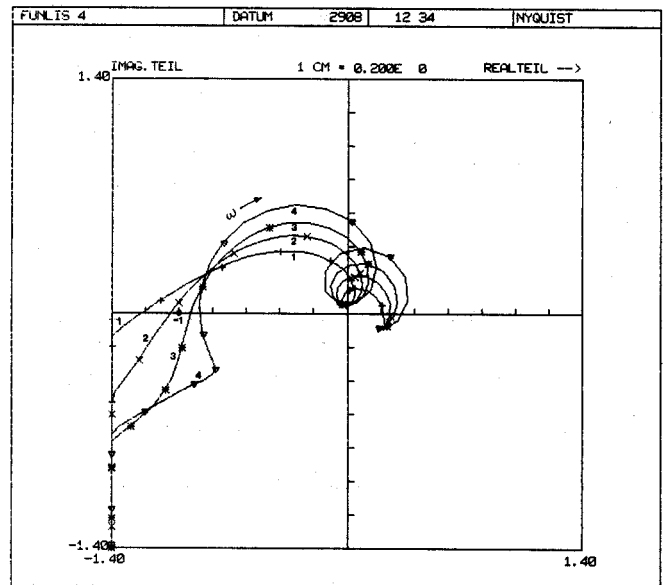


Bild 9. Nyquist-Diagramm für den offenen Regelkreis nach Bild 8.

Für Abtastsysteme ist die Anwendung des Nyquist-Kriteriums bekanntlich schwieriger als bei kontinuierlichen Systemen. Der Frequenzgang des offenen Kreises muß folgendermaßen berechnet werden (siehe [5]):

$$F_0^*(j\omega) = G(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} R_0(j\omega - jk\Omega). \quad (31)$$

Es ist $G(j\omega)$ der digitale Regler und $R_0(j\omega)$ der Frequenzgang der Reihenschaltung der kontinuierlichen Strecke einschließlich Meßfilter und des Haltegliedes nebst Abtaster. Mit $\Omega = 2\pi/T$ wird die Abtast-Kreisfrequenz bezeichnet.

In den meisten regelungstechnischen Anwendungen genügt die Berücksichtigung des „Hauptstreifens“ ($k = 0$)

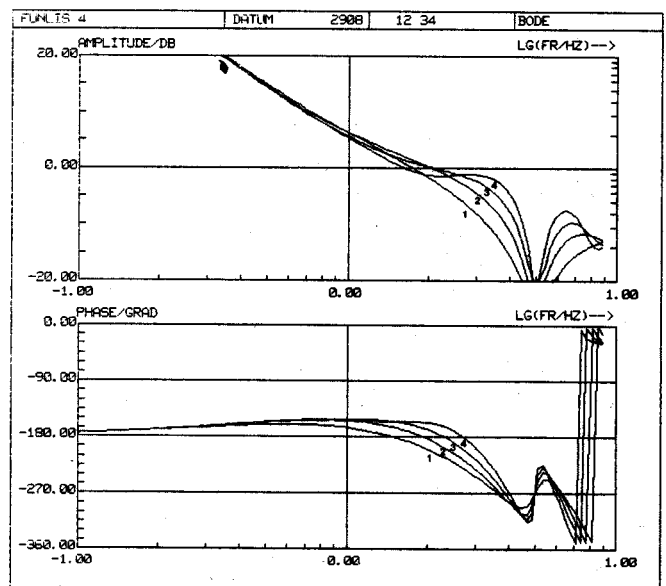


Bild 10. Bode-Diagramm für den offenen Regelkreis nach Bild 8 (Abtastfrequenz 10 Hz).

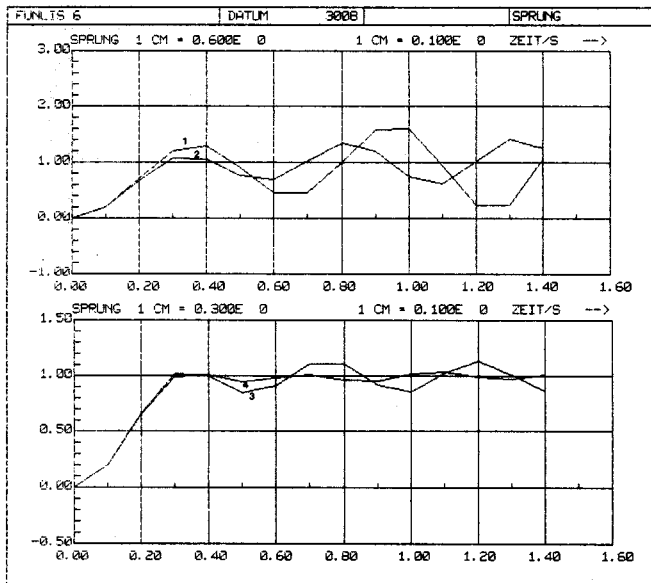


Bild 11. Sprungantwort für den geschlossenen Regelkreis nach Bild 8 (Abtastfrequenz 10 Hz).

und des ersten „Nebenstreifens“ ($k = 1$), was hier aus Platzmangel nicht weiter erörtert wird.

Im Rechenprogramm FUNLIS/F [7] werden die zugehörigen beiden Teilfrequenzgänge berechnet, komplex addiert und in Bode- oder Nyquist-Diagrammen aufgezeichnet. Die Hinzunahme weiterer Nebenstreifen ist rechentechnisch kein Problem, praktisch jedoch überflüssig.

Die Nyquist-Diagramme für die Frequenzgang-Ortskurven des offenen Kreises nach Bild 9 erlauben folgenden Schluß: Der geschlossene Regelkreis mit dem Sekanten- und Parabel-Differenzierern (Regler 1 und 2) ist instabil; mit den Differenzierern dritter und vierter Ordnung (Regler 3 und 4) ist er stabil.

Im Bode-Diagramm, Bild 10, erkennt man besonders gut die mit wachsender Ordnung zunehmende Phasenreserve.

Aus Platzgründen fehlen die Bode-Diagramme der geschlossenen Regelkreise.

Die Stabilitätsaussagen nach dem Nyquist-Kriterium wurden durch eine Simulation des geschlossenen Kreises überprüft und bestätigt:

Im Bild 11 findet man oben die Sprungantworten der instabilen Systeme (Regler 1 und 2) und unten die der stabilen Systeme (Regler 3 und 4).

Der Aufwand für die Differenzierer höherer Ordnung nebst Bilinear-Filter zur Rauschunterdrückung ist relativ hoch, gestattet aber eine sehr niedrige Abtastfrequenz (ca. fünf Abtastungen pro Periode der gedämpften Schwingung im geschlossenen Kreis).

In diesem Abschnitt sollte einerseits die Brauchbarkeit des QTA-Verfahrens und andererseits die konsequente Rechnerunterstützung der klassischen Methoden nach *Bode* und *Nyquist* demonstriert werden.

Literatur

- [1] *Jentsch, W.*: Digitale Simulation kontinuierlicher Systeme. R. Oldenbourg Verlag, München, Wien 1969.
- [2] *Föllinger, O.*: Regelungstechnik. Elitera-Verlag, Berlin 1978.
- [3] *Hanselmann, H.*: Diskretisierung kontinuierlicher Regler. Regelungstechnik 32 (1984), S. 326–334.
- [4] *Best, R.*: Handbuch der analogen und digitalen Filterungstechnik. AT Verlag, Aarau, Schweiz, 1982.
- [5] *Zypkin, J.S.*: Grundlagen der Theorie automatischer Systeme. VEB Verlag Technik, Berlin 1981.
- [6] *Tietze, U., und Schenk, Chr.*: Halbleiter-Schaltungstechnik. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1974.
- [7] *Hoffmann, G.*: FUNLIS/F, Programmpaket zur Analyse kontinuierlicher und abgetasteter dynamischer Systeme im Frequenzbereich (erhältlich beim Verfasser).

Manuskriptingang: 16. Oktober 1985.

Actual address on Internet pages

Old links:

<http://www.fho-emden.de/~hoffmann/>

<http://www.fho-emden.de/~hoffmann/filename.pdf>

Please use since February 2013

New links:

<http://docs-hoffmann.de/>

<http://docs-hoffmann.de/filename.pdf>