

Warum es bei den Gezeiten zwei Flutberge gibt

Einleitung

Mond und Sonne verursachen Ebbe und Flut, die Gezeiten. Wir beschränken uns zunächst auf den Einfluß des Mondes und wollen die Frage klären, warum Flutberge sowohl auf der mondzugewandten als auch auf der mondabgewandten Seite der Erde entstehen. Im Internet findet man als Erklärungen die vom Abstand abhängige Anziehungskraft des Mondes und die Fliehkraft. Der Einfluß der Trägheitskräfte, oftmals Scheinkräfte genannt, also außer der einfachen Trägheitskraft die Fliehkraft und die Corioliskraft, wird oftmals anschaulich erörtert. Hierbei kann man sich leicht täuschen. Gültige Erkenntnisse gewinnt man am besten durch Anwendung der Gesetze der Mechanik. Es soll der Lagrange-Formalismus verwendet werden.

Das Bild zeigt die Erde und den Mond unmaßstäblich. Der Mittelpunkt M der Erde kreist mit dem Winkel φ und der Winkelgeschwindigkeit ω im Abstand a um den Massenmittelpunkt S von Erde und Mond. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß die Erdachse senkrecht auf der Mondbahn steht. Die Erde dreht sich mit dem Winkel Φ und der Winkelgeschwindigkeit Ω relativ zur raumfesten Richtung MU um M . Man blickt auf den Nordpol und sieht den Äquator mit dem Radius A . Oder man sieht einen Breitenkreis mit entsprechend kleinerem Radius. Im Punkt P ist das Koordinatensystem x,y befestigt. In diesem System bewegt sich ein Wasserteilchen m . Die generalisierten Koordinaten im Sinne des Lagrange-Formalismus sind x und y . Deswegen darf man x,y und deren Ableitungen, obwohl sie klein sind, erst nach dem Aufstellen der Bewegungsgleichungen zu Null setzen.

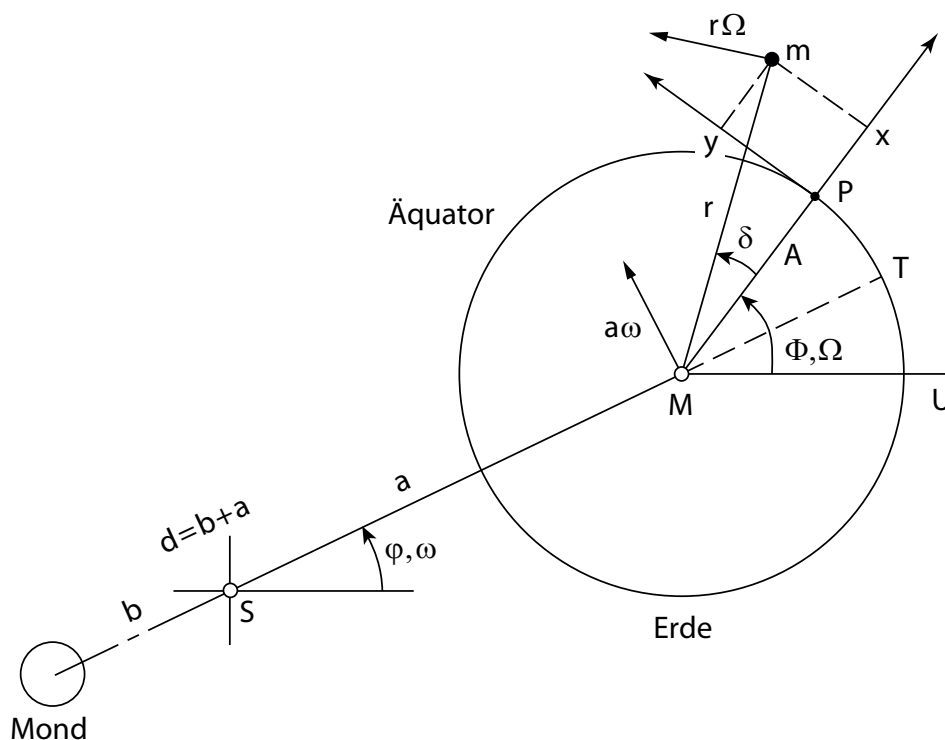


Bild 1 Bewegung von Erde und Mond

Lagrange-Formalismus

Zunächst muß die kinetische Energie berechnet werden. Die Geschwindigkeit der Masse m (die später zu Eins gesetzt wird), ergibt sich aus $a\omega$ bei M und $r\Omega$ bei m , beide relativ zum ruhenden Bezugssystem, in Komponenten dargestellt im System x, y . Der Anteil $r\Omega$ wird moderat linearisiert. Dann wird der Lagrange-Formalismus für x und y angewendet, mit den generalisierten Kräften F_x und F_y .

Kinetische Energie:

$$(1) \quad T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2)$$

Komponenten von $r\Omega$:

$$(2) \quad \begin{aligned} r\Omega &= (A+x)\Omega / \cos\delta \approx (A+x)\Omega \\ \delta &\approx y/(A+x) \approx y/A \\ (r\Omega)_x &= -(A+x)\Omega\delta = -(A+x)\Omega y/A \approx -y\Omega \\ (r\Omega)_y &\approx (A+x)\Omega \end{aligned}$$

Komponenten der Geschwindigkeit:

$$(6) \quad v_x = a\omega \sin(\Phi - \varphi) - y\Omega + \dot{x}$$

$$(7) \quad v_y = a\omega \cos(\Phi - \varphi) + (A+x)\Omega + \dot{y}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 &= (a\omega)^2 \sin^2(\Phi - \varphi) + (\dot{x} - y\Omega)^2 + 2a\omega \sin(\Phi - \varphi) (\dot{x} - y\Omega) + \\ &\quad (a\omega)^2 \cos^2(\Phi - \varphi) + (\dot{y} + (A+x)\Omega)^2 + 2a\omega \cos(\Phi - \varphi) (\dot{y} + (A+x)\Omega) \end{aligned}$$

Kinetische Energie, mit $m = 1$:

$$(9) \quad T = \frac{1}{2} (a\omega)^2 + \frac{1}{2} (\dot{x} - y\Omega)^2 + \frac{1}{2} (\dot{y} + (A+x)\Omega)^2 + a\omega \sin(\Phi - \varphi) (\dot{x} - y\Omega) + a\omega \cos(\Phi - \varphi) (\dot{y} + (A+x)\Omega)$$

Lagrange-Gleichung für x :

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \dot{x} - y\Omega + a\omega \sin(\Phi - \varphi) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \ddot{x} - \Omega \dot{y} + a\omega(\Omega - \omega) \cos(\Phi - \varphi) \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= (\dot{y} + (A+x)\Omega)\Omega + a\omega \Omega \cos(\Phi - \varphi) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} &= \ddot{x} - 2\Omega \dot{y} - (A+x)\Omega^2 - a\omega^2 \cos(\Phi - \varphi) = F_x \end{aligned}$$

$$(14) \quad \ddot{x} = 2\Omega \dot{y} + (A+x)\Omega^2 + a\omega^2 \cos(\Phi - \varphi) + F_x$$

Lagrange-Gleichung für y :

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= \dot{y} + (A+x)\Omega + a\omega \cos(\Phi - \varphi) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= \ddot{y} + \Omega \dot{x} - a\omega(\Omega - \omega) \sin(\Phi - \varphi) \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= -\Omega \dot{x} + y\Omega^2 - a\omega \Omega \sin(\Phi - \varphi) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} &= \ddot{y} + 2\Omega \dot{x} - y\Omega^2 + a\omega^2 \sin(\Phi - \varphi) = F_y \end{aligned}$$

$$(19) \quad \ddot{y} = -2\Omega \dot{x} + y\Omega^2 - a\omega^2 \sin(\Phi - \varphi) + F_y$$

Generalisierte Kräfte

G ist die Gravitationskonstante. Es gilt $d=a+b$. Es sei $m=1$. Dann wirken die folgenden äußeren Kräfte, bzw. Beschleunigungen, F_e und F_m , mit Indizes e für Erde und m für Mond:

$$(20) \quad F_e = \frac{Gm_e}{A^2}$$

$$F_m = \frac{Gm_m}{[d + A\cos(\Phi - \varphi)]^2}$$

F_m ist fast parallel zur Richtung MS . Die Abweichung ist kleiner als 1° .

Im weiteren Fortgang setzen wir $x = 0, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0$.

F_e wirkt in negativer Richtung von x und ist der Fliehkraft $A\Omega^2$ entgegengesetzt. Dies ergibt am Äquator die effektive Erdbeschleunigung:

$$(22) \quad g = \frac{Gm_e}{A^2} - A\Omega^2$$

Der Fliehkraftanteil verursacht den sogenannten Äquatorwulst. Er ist für die Gezeiten ohne Bedeutung, daher bleiben die folgenden Terme übrig:

$$(23) \quad \ddot{x} = +a\omega^2 \cos(\Phi - \varphi) + F_{m,x}$$

$$\ddot{y} = -a\omega^2 \sin(\Phi - \varphi) + F_{m,y}$$

Die Gravitation des Mondes kann man so darstellen:

$$(25) \quad F_m = \frac{Gm_m}{[d + A\cos(\Phi - \varphi)]^2} = \frac{Gm_m}{d^2 \left[1 + \frac{A}{d} \cos(\Phi - \varphi)\right]^2}$$

$$F_m = \frac{Gm_m}{d^2 [1 + \varepsilon]^2} \approx \frac{Gm_m}{d^2} [1 - 2\varepsilon] = F_o [1 - 2\varepsilon]$$

$$(27) \quad F_o = \frac{Gm_m}{d^2}$$

$$\varepsilon = \frac{A}{d} \cos(\Phi - \varphi)$$

ε liegt im Bereich $\pm 1/60$.

F_o ist die Gravitation des Mondes im Erdmittelpunkt und an den Punkten mit dem gleichem Abstand d .

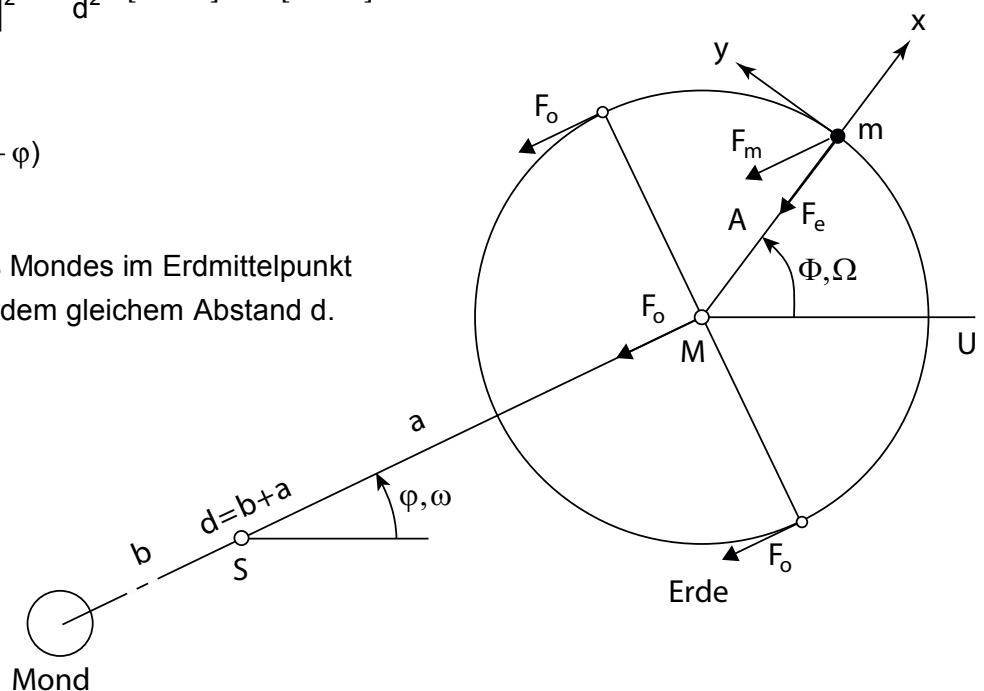


Bild 2 Gravitationskräfte

Gezeitenerzeugendes Kraftfeld

An jeder Stelle hat man die Gravitation des Mondes nach Gl.(27) und die überall gleiche Zentrifugalkraft infolge der Bewegung der Erde um S nach Gl.(23,24). Aus der ortsabhängigen Gravitationskraft hebt sich die Anteil $F_o = a\omega^2$ heraus. Man beachte, daß sich das Koordinatensystem x,y mitdreht.

Für $\Phi - \varphi = 0$ bleibt die nach außen gerichtete Kraft $F_o 2A/d$ übrig (rechts).

Für $\Phi - \varphi = \pi$ bleibt die nach außen gerichtete Kraft $F_o 2A/d$ übrig (links).

Für $\Phi - \varphi = \pi/2$ heben sich die beiden Anteile auf (oben, auch in der Mitte und unten).

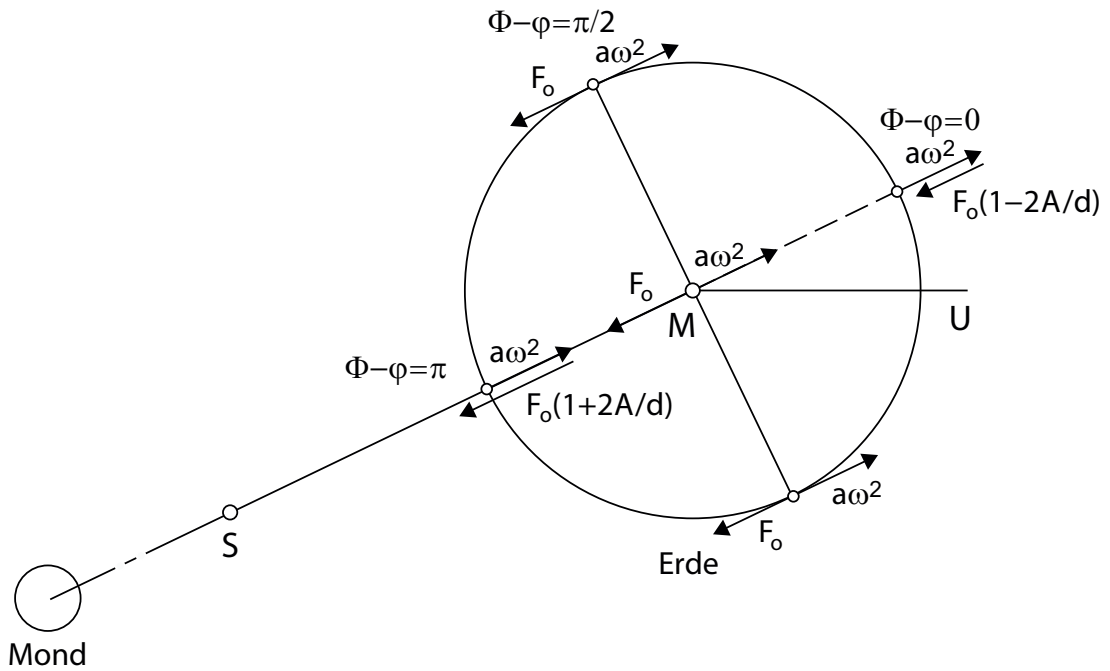


Bild 3 Gezeitenerzeugendes Kraftfeld

Kontur des Flutbergs

In Bild 4 haben wir wieder den Blick auf den Nordpol und den Äquator der Erde. Rechts sieht man den Flutberg, hier grau, unmaßstäblich gezeichnet. Der Punkt P hat die Koordinaten $\beta = \Phi - \varphi$ und $x = A\beta$ als Bogen. Die resultierende Gravitation des Mondes hat eine tangentielle Horizontalkomponente und eine Vertikalkomponente.

Es gilt die folgende Annahme: Die Wasseroberfläche stellt sich senkrecht zur resultierenden Beschleunigung, die sich aus g und der Horizontalkomponente ergibt. Die Vertikalkomponente kann im Verhältnis zu g vernachlässigt werden. Die lokale Höhe des Flutbergs (Tidenhub) in radialer Richtung heißt h .

$$(28) \quad \tan \alpha = \frac{dh}{dx} = -\frac{F_o 2A/d}{g} \cos \beta \sin \beta$$

$$x = A\beta$$

$$dx = A d\beta$$

$$(31) \quad \frac{dh}{A d\beta} = -\frac{F_o A/d}{g} \cos \beta \sin \beta$$

$$\frac{dh}{d\beta} = -\frac{F_o (A/d) A}{g} \sin 2\beta$$

$$(33) \quad h = -\frac{F_o A^2}{g d} \int \sin 2\beta d\beta$$

$$h = +\frac{F_o A^2}{2gd} \cos 2\beta + C$$

$$(35) \quad \text{Für } \beta = \pi/2 \text{ sei } h = 0:$$

$$h = \frac{F_o A^2}{2gd} (1 + \cos 2\beta)$$

$$(37) \quad h_o = h(0):$$

$$h_o = \frac{F_o A^2}{gd} = \frac{F_o (A/d) A}{g}$$

Mit Zahlen aus dem Anhang ergibt sich für den Beitrag des Mondes:

$$h_o = \frac{3.32 \cdot 10^{-5} \cdot 0.0166 \cdot 6.378 \cdot 10^6}{9.81}$$

$$(40) \quad h_{o,m} = 0.358 \text{ m}$$

Für den Beitrag der Sonne muß man nur a , d , ω für den Umlauf der Erde um die Sonne einsetzen:

$$(41) \quad h_{o,s} = 0.164 \text{ m}$$

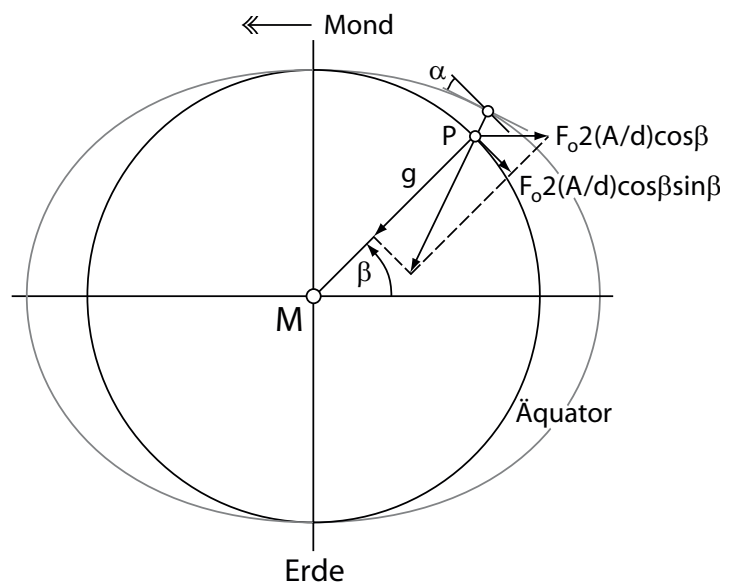


Bild 4 Kontur des Flutbergs

Zahlenwerte

SI-Einheiten, wenn keine Einheiten angegeben sind.

Mond

Masse	m_m	$7.3460 \cdot 10^{22}$	kg		
Siderische Umlaufszeit	T_m	27.322	d	$2.3610 \cdot 10^6$	s
Radius	r_m	1727	km		
Neigung der Bahnebene		5.145	Grad		

Erde

Masse	m_e	$597.24 \cdot 10^{22}$	kg		
Siderische Umlaufszeit	T_e	365.256	d	$3.1558 \cdot 10^7$	s
Äquatorradius	r_e, A	6378.14	km	$6.3781 \cdot 10^6$	m
Polradius		6356.75	km		
Neigung der Achse		23,44	Grad		

Sonne

Masse	m_s	$1.9884 \cdot 10^{30}$	kg		
Radius	r_s	669342	km		

Abstände

Mond – Erde					
	d	384400	km	$3.8440 \cdot 10^8$	m
	a	4689.7	km	$4.6900 \cdot 10^6$	m
	b	379710	km	$3.7971 \cdot 10^8$	m
Sonne – Erde					
	d	$149.60 \cdot 10^6$	km	$1.4960 \cdot 10^{11}$	m
	a	$\approx d$			
	b	≈ 0			

Gravitationskonstante	G	$6.6743 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$		
-----------------------	---	-------------------------	---	--	--

Zwischengrößen

$$\omega = \omega_m = 2\pi/T_m = 2.662 \cdot 10^{-6}$$

$$\omega^2 = 7.0845 \cdot 10^{-12}$$

$$a\omega^2 = F_o = 3.32 \cdot 10^{-5}$$

$$A/D = 0.0166 \approx 1/60$$

$$2 F_o A/D = 1.106 \cdot 10^{-6}$$

Ergebnis

Die Erklärung für die Flutberge ist wohl plausibel, aber offensichtlich enthält die hier vorgestellte Theorie einige Fehlerquellen:

Die Erdachse steht nicht senkrecht auf der Mondbahn und auch nicht senkrecht auf der Ekliptik. Die Mondbahn und die Erdbahn sind nicht kreisförmig, sondern elliptisch.

Die Richtung vom Meßort zum Mond kann bis zu 1° von der Richtung vom Erdmittelpunkt zum Mond abweichen. Corioliskräfte wurden nicht berücksichtigt.

Nach der Theorie ist der Flutberg rotationssymmetrisch bezüglich der Achse Erde – Mond. Daß diese Achse nicht in der Äquatorebene liegt, ist nicht wesentlich für die Höhe des Flutbergs, denn die Änderung der effektiven Erdbeschleunigung infolge der Fliehkraft spielt keine große Rolle.

Die Erde dreht sich unter den Flutbergen, und diese verschieben sich langsam mit der Richtung von Sonne und Mond. Wie sich das auf der Erde auswirkt, wurde hier nicht erörtert. Für die Erklärung als erzwungene Schwingung müßte man die Eigenfrequenz für die Bewegung es Wassers kennen.

Die Fluthöhen auf der Erde weichen extrem von der Modellvorstellung ab, selbst mitten im Pazifik. Hier eine Darstellung nach [6]:

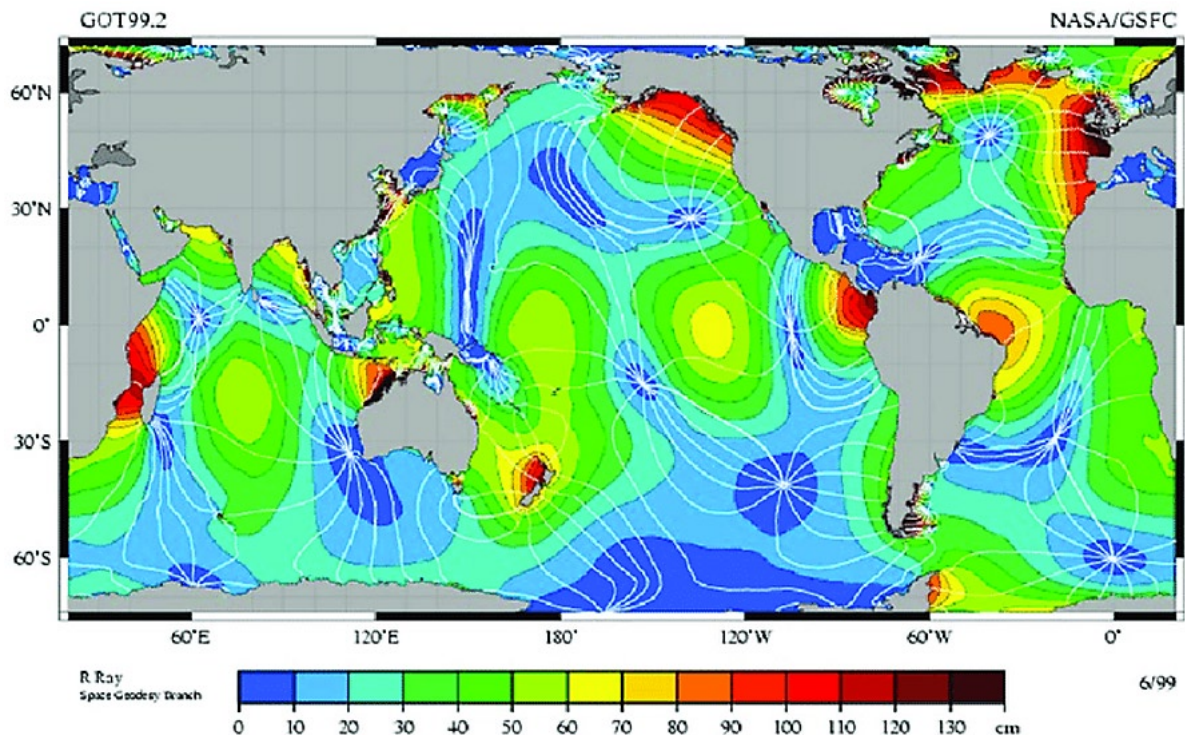


Bild 5 Tidal patterns [6]

In [5] im Abschnitt *Semi-diurnal tide constituents* wird die Amplitude der Gezeiten mittels Fourier-Transformation für sechs Orte (example locations) beschrieben. Das sind die maßgeblichen Frequenzanteile:

	Period(hr)	Amplitude at example location (cm)						
Principal lunar semidiurnal	12.4206012	268.7	3.9	15.9	97.3	58.0	23.0	
Principal solar semidiurnal	12	42.0	3.3	2.1	32.5	13.7	9.2	
Larger lunar elliptic semidiurnal	12.65834751	54.3	1.1	3.7	20.1	12.3	4.4	

In [4] findet man:

„Überlagerung der vom Mond und von der Sonne verursachten Gezeitenkräfte:

Die von Mond und Sonne verursachten Gezeitenkräfte addieren sich. Die stärkste Gesamtkraft ergibt sich, wenn Sonne, Erde und Mond auf einer Linie liegen, was bei Voll- und Neumond mit einer Periode von etwa $14\frac{3}{4}$ Tagen näherungsweise eintritt. Dann heben sie den Wasserspiegel des Ozeans bei Hochwasser etwa $\frac{3}{4}$ Meter (etwa $\frac{1}{2}$ Meter durch den Mond und etwa $\frac{1}{4}$ Meter durch die Sonne) an.

Bei Halbmond liegt zwischen den beiden Kraftfeldern ein rechter Winkel. Ihre Überlagerung führt zu Kräften, die den Wasserspiegel des Ozeans weniger stark anheben.“

Die im Wikipedia-Artikel angegebenen Tidenhübe, 0,5m infolge des Mondes und 0,25m infolge der Sonne, unterscheiden sich erheblich von den Werten, 0,358m und 0,164m nach Gl.(40,41). Der Grund dafür ist nicht bekannt. Ist in der Herleitung für Gl.(40,41) womöglich ein Fehler?.

Anhand realer Pegelmessungen lassen sich weder die Werte aus dem Wikipedia-Artikel, noch die hier berechneten Werte bestätigen. Im Pazifik ist der Tidenhub zwar auf den Phoenix-Inseln maximal 0,9m, sonst aber eher höher, zum Beispiel 1,9m auf den Gilbert-Inseln, Bild 6 [7]. Vollmond ist am 20.Oktober (Springflut).

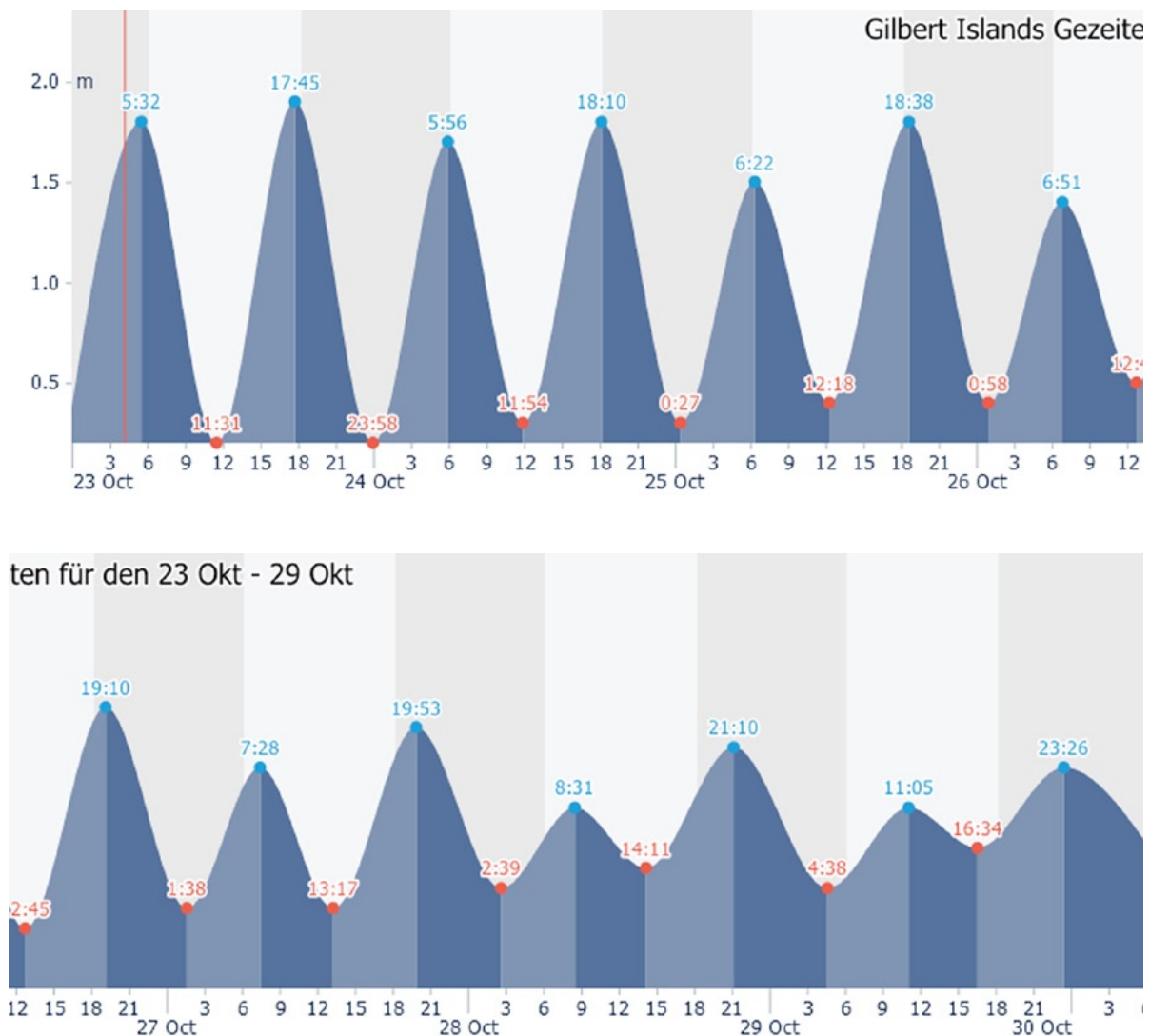


Bild 6 Gezeiten auf den Gilbert-Inseln

Nach Messungen des Australian Government, Bureau of Meteorology, ist der Tidenhub auf der Gilbert-Insel Tarawa (Staat Kiribati) sogar etwa 2.2m [8]:

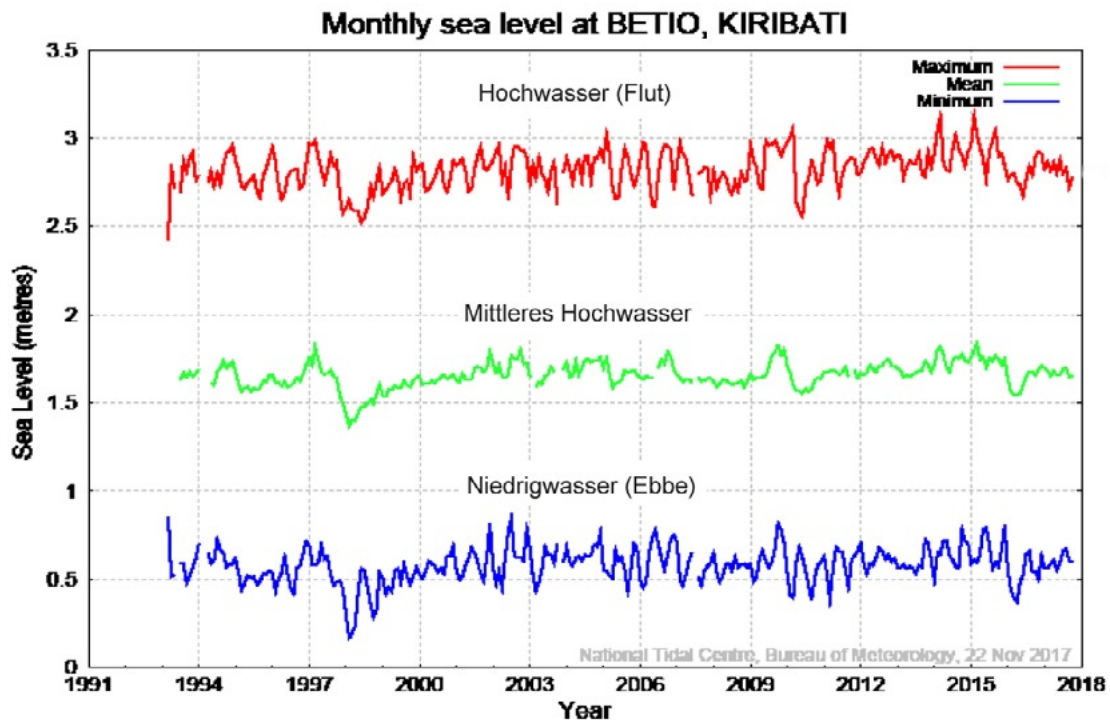


Bild 7 Gezeiten in Betio, Tarawa , Kiribati

Referenzen

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Mond>
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Erde>
- [3] <https://de.wikipedia.org/wiki/Erde-Mond-Schwerpunkt>
- [4] https://de.wikipedia.org/wiki/Gezeiten#Dynamische_Gezeitentheorie
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Theory_of_tides
- [6] <https://svs.gsfc.nasa.gov/stories/topex/tides.html>
https://svs.gsfc.nasa.gov/stories/topex/images/TidalPatterns_hires.tif
- [7] <https://de.tideschart.com/World-Tides/>
- [8] <http://docs-hoffmann.de/kiribati-pegel.pdf>
- [9] Dieses Dokument:
<http://docs-hoffmann.de/gezeiten17102021.pdf>

Dank an Norbert Stuckenberg für die Diskussion und für Verbesserungsvorschläge.

Gernot Hoffmann, Emden, 25. Oktober 2021